



Zestaw 5

1. Wykaż, że dla każdych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} < a + b + c,$$

2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że $p + 27$ jest sześcianem liczby naturalnej.

3. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na bokach AB i AD wybrano odpowiednio takie punkty E i F , że odcinek EF jest równoległy do przekątnej BD danego równoległoboku. Wykaż, że pola trójkątów BCE i CDF są równe.

4. Liczby a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Wykaż, że wśród liczb:

$$a + b - \sqrt{cd}, \quad b + c - \sqrt{da}, \quad c + d - \sqrt{ab}, \quad d + a - \sqrt{bc}$$

co najmniej dwie są dodatnie.

5. Każdy punkt płaszczyzny został pomalowany jednym z dwóch kolorów, przy czym istnieją na tej płaszczyźnie punkty różnych kolorów. Wykaż, że istnieją na tej płaszczyźnie dwa punkty różnych kolorów odległe o 10.

6. Wyznacz wszystkie rozwiązania równania

$$3x\sqrt{x^2 - 9} + 4x\sqrt{x^2 - 16} + 5x\sqrt{x^2 - 25} = 120.$$

7. Na kuli o promieniu 1 opisano wielościan, którego pole powierzchni jest równe 12. Oblicz objętość tego wielościanu.

