Zestaw 5 – szkice rozwiązań zadań

1. Wykaż, że dla każdych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność
$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}<a+b+c.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że prawdziwa jest równoważność $L<P \Longleftrightarrow L-P<0$. Aby wykazać nierówność daną w zadaniu wystarczy więc wykazać, że
$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}-(a+b+c)<0$$
dla każdych liczb dodatnich a, b, c.
Pokażemy, że tak jest. Obliczając różnicę lewej i prawej strony danej nierówności, dostajemy kolejno
$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}-(a+b+c)=$$
$$=\frac{a^3+b^3+c^3-a^3-ab^2-ac^2-a^2b-b^3-bc^2-a^2c-b^2c-c^3}{a^2+b^2+c^2}=$$
$$=-\frac{ab^2+ac^2+a^2b+bc^2+a^2c+b^2c}{a^2+b^2+c^2}<0.$$
Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla każdych dodatnich liczb a, b, c. Kończy to rozwiązanie zadania.

2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że $p+27$ jest sześcianem liczby naturalnej.

Rozwiązanie

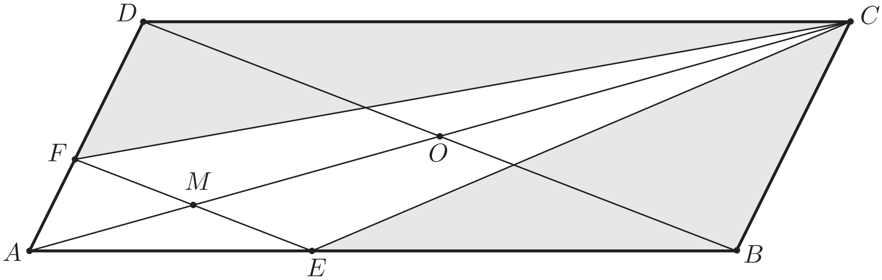
Niech $p+27=k^3$ dla pewnej liczby naturalnej k. Wtedy
$$p=k^3-27$$
$$p=(k-3)(k^2+3k+9).$$
Ponieważ liczba p jest liczbą pierwszą oraz $k-3<k^2+3k+9$, więc
$$k-3=1 \quad \text{i} \quad k^2+3k+9=p,$$
stąd $k=4$ i $p=16+12+9=37$. Bezpośrednim podstawieniem sprawdzamy, że liczba ta spełnia warunki zadania.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

3. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na bokach AB i AD wybrano odpowiednio takie punkty E i F, że odcinek EF jest równoległy do przekątnej BD danego równoległoboku. Wykaż, że pola trójkątów BCE i CDF są równe.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku: O — punkt przecięcia przekątnych AC i BD równoległoboku $ABCD$, a M — punkt przecięcia przekątnej AC z odcinkiem EF.



Ponieważ odcinek EF jest równoległy do przekątnej BD danego równoległoboku, a punkt O jest środkiem odcinka BD (przekątne w każdym równoległoboku przecinają się w połowie), więc punkt M jest środkiem odcinka EF, a zatem pola trójkątów AEM i AFM są równe. Wynika stąd, że punkty E i F są jednakowo oddalone od prostej AC, czyli $[ACE]=[ACF]$, gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ. Każda przekątna równoległoboku dzieli go na dwa trójkąty o równych polach. Otrzymujemy stąd kolejno

$$[ABC]=[ACD]$$
$$[BCE]+[ACE]=[CDF]+[ACF]$$
$$[BCE]=[CDF].$$

4. Liczby a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Wykaż, że wśród liczb:
$$a+b-\sqrt{cd}\,,\quad b+c-\sqrt{da}\,,\quad c+d-\sqrt{ab}\,,\quad d+a-\sqrt{bc}$$
co najmniej dwie są dodatnie.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeśli suma dwóch liczb jest dodatnia, to co najmniej jedna z tych liczb jest dodatnia. Przyjmijmy oznaczenia

$$x_1=a+b-\sqrt{cd}\,,\qquad x_2=b+c-\sqrt{da}\,,$$
$$x_3=c+d-\sqrt{ab}\,,\qquad x_4=d+a-\sqrt{bc}\,.$$

Ponieważ

$$x_1+x_3=a+b-\sqrt{cd}+c+d-\sqrt{ab}=a-\sqrt{ab}+\frac{1}{4}b+c-\sqrt{cd}+\frac{1}{4}d+\frac{3}{4}b+\frac{3}{4}d=$$
$$=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}-\frac{1}{2}\sqrt{d}\right)^2+\frac{3}{4}b+\frac{3}{4}d,$$

więc $x_1+x_3>0$. Zatem co najmniej jedna z liczb x_1, x_3 jest dodatnia. Analogicznie pokazujemy, że $x_2+x_4>0$, czyli co najmniej jedna z liczb x_2, x_4 jest dodatnia. Wykazaliśmy tym samym, że wśród danych czterech liczb co najmniej dwie są dodatnie.

---

5. Każdy punkt płaszczyzny został pomalowany jednym z dwóch kolorów, przy czym istnieją na tej płaszczyźnie punkty różnych kolorów. Wykaż, że istnieją na tej płaszczyźnie dwa punkty różnych kolorów odległe o 10.

Rozwiązanie

Wybierzmy na tej płaszczyźnie dwa punkty różnych kolorów. Niech to będą punkty A i B.
Jeżeli $AB=10$, to właśnie te punkty spełniają warunki zadania.
Jeżeli $AB<10$, to wybieramy na tej płaszczyźnie taki punkt C, że $AC=BC$. Jeżeli C ma taki sam kolor jak A, to punktami spełniającymi warunki zadania są punkty B i C. W przeciwnym przypadku punktami spełniającymi warunki zadania są punkty A i C.
Niech teraz $AB>10$.

Wybierzmy na odcinku AB kolejno takie punkty $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{n-1}, C_n$, że

$$AC_1=C_1C_2=C_2C_3=\ldots=C_{n-1}C_n=10 \quad \text{i} \quad C_nB\leqslant 10.$$

Jeżeli któryś z odcinków: AC_1, C_1C_2, C_2C_3, …, $C_{n-1}C_n$ ma końce różnych kolorów, to właśnie te punkty spełniają warunki zadania. Jeżeli wszystkie te odcinki mają końce jednakowych kolorów, to są one wszystkie koloru takiego samego jak punkt A. Zatem punkty C_n i B są różnych kolorów. Jeśli $C_nB=10$, to te punkty spełniają warunki zadania. Jeśli natomiast $C_nB<10$, to wybieramy na tej płaszczyźnie taki punkt C, że $C_nC=BC=10$. Jeżeli punkt C jest takiego samego koloru jak punkt C_n, to punkty B i C spełniają warunki zadania. W przeciwnym przypadku warunki zadania spełniają punkty C_n i C.

---

6. Wyznacz wszystkie rozwiązania równania

$$3x\sqrt{x^2-9}+4x\sqrt{x^2-16}+5x\sqrt{x^2-25}=120.$$

Rozwiązanie

Dane równanie możemy zapisać równoważnie

$$3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}=\frac{120}{x}.$$

Ponieważ lewa strona otrzymanego równania jest dodatnia, więc jest też $x>0$. Aby lewa strona równania była określona, muszą być spełnione nierówności

$$x^2-9\geqslant 0,\quad x^2-16\geqslant 0,\quad x^2-25\geqslant 0,$$

czyli dla $x>0$ mamy

$$x\geqslant 3,\quad x\geqslant 4,\quad x\geqslant 5,$$

a stąd $x\geqslant 5$.
Jeżeli $x>5$, to

$$\begin{aligned}&3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}>\\&>3\sqrt{25-9}+4\sqrt{25-16}+5\sqrt{25-25}=\\&=3\cdot 4+4\cdot 3=24.\end{aligned}$$

Jednocześnie

$$\frac{120}{x}<\frac{120}{5}=24.$$

Zatem dla $x>5$ dane równanie jest sprzeczne. Natomiast bezpośrednim podstawieniem sprawdzamy, że $x=5$ spełnia dane równanie i jest to jedyne jego rozwiązanie.

---

7. Na kuli o promieniu 1 opisano wielościan, którego pole powierzchni jest równe 12. Oblicz objętość tego wielościanu.

Rozwiązanie

Łącząc każdy wierzchołek wielościanu opisanego na tej kuli z jej środkiem, otrzymujemy ostrosłupy, których podstawami są ściany wielościanu, a wysokościami promienie kuli. Suma objętości tych ostrosłupów jest równa objętości wielościanu, czyli $V_{\text{wielościanu}}=V_1+V_2+\dots+V_n$, gdzie V_1, V_2, …, V_n są objętościami powstałych ostrosłupów. Jeśli pola ścian wielościanu są równe P_1, P_2, …, P_n, to

$$\begin{aligned}V_{\text{wielościanu}}&=\frac{1}{3}P_1r+\frac{1}{3}P_2r+\dots+\frac{1}{3}P_nr=\frac{1}{3}r(P_1+P_2+\dots+P_n)\\&=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 12=4.\end{aligned}$$

Zauważy jednak, że

$$V_{\text{kuli}}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\cdot 1>4.$$

Zatem taki wielościan opisany na kuli o promieniu 1, o jakim jest mowa w zadaniu, nie istnieje.