



Zestaw 5

1. Wykaż, że dla każdych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} < a + b + c.$$

Wskazówka

Aby wykazać nierówność $L < P$ wystarczy wykazać, że prawdziwa jest nierówność $L - P < 0$.

2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że $p + 27$ jest sześcianem liczby naturalnej.

Wskazówka

W rozwiązaniu może być przydatny wzór $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

3. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na bokach AB i AD wybrano odpowiednio takie punkty E i F , że odcinek EF jest równoległy do przekątnej BD danego równoległoboku. Wykaż, że pola trójkątów BCE i CDF są równe.

Wskazówka

Wykaż na początku, że pola trójkątów ACE i ACF są równe.

4. Liczby a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Wykaż, że wśród liczb:

$$a + b - \sqrt{cd}, \quad b + c - \sqrt{da}, \quad c + d - \sqrt{ab}, \quad d + a - \sqrt{bc}$$

co najmniej dwie są dodatnie.

Wskazówka

Zauważ, że jeśli suma dwóch liczb jest dodatnia, to co najmniej jedna z tych liczb musi być dodatnia.



5. Każdy punkt płaszczyzny został pomalowany jednym z dwóch kolorów, przy czym istnieją na tej płaszczyźnie punkty różnych kolorów. Wykaż, że istnieją na tej płaszczyźnie dwa punkty różnych kolorów odległe o 10.

Wskazówka

Niech punkty A i B będą punktami różnych kolorów. Rozpatrz przypadki: $1^\circ AB = 10$, $2^\circ AB < 10$, $3^\circ AB > 10$. Zauważ, że badanie przypadku 3° można sprowadzić do badania przypadków: 1° i 2° .

6. Wyznacz wszystkie rozwiązania równania

$$3x\sqrt{x^2-9} + 4x\sqrt{x^2-16} + 5x\sqrt{x^2-25} = 120.$$

Wskazówka

Zbadaj, jakie wartości może przyjmować x , aby lewa strona danego równania była określona? Jaki stąd można wysnuć wniosek o wartościach lewej strony równania?

7. Na kuli o promieniu 1 opisano wielościan, którego pole powierzchni jest równe 12. Oblicz objętość tego wielościanu.

Wskazówka

Spróbuj najpierw rozwiązać analogiczne zadanie płaskie: *na kole o promieniu 1 opisano wielokąt o obwodzie 6. Oblicz pole tego wielokąta. Czy zauważasz analogię? Zwróć uwagę na warunki rozwiązalności zadania!*

