



Zestaw 6 — szkice rozwiązań zadań

1. Znajdź wszystkie trójki (x, y, z) liczb rzeczywistych, które są rozwiązaniami równania

$$5(x^2 + y^2 + z^2) = 4(xy + yz + zx).$$

Rozwiązanie

Przekształcając równoważnie dane równanie, otrzymujemy

$$5(x^2 + y^2 + z^2) = 4(xy + yz + zx)$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 4y^2 - 4yz + z^2 + 4z^2 - 4zx + x^2 = 0$$

$$(2x - y)^2 + (2y - z)^2 + (2z - x)^2 = 0.$$

Ponieważ kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemny, więc suma kwadratów jest równa zero tylko wtedy, gdy wszystkie liczby są zerami, zatem

$$2x - y = 2y - z = 2z - x = 0$$

czyli

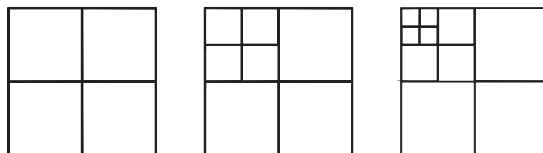
$$x = 2z = 4y = 8x.$$

Stąd równanie ma tylko jedno rozwiązanie: $x = y = z = 0$.

2. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 6$ kwadrat można rozciąć na n kwadratów.

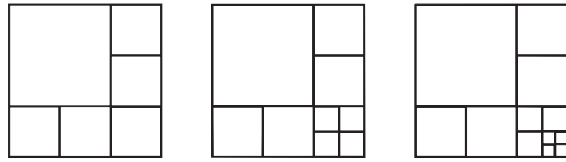
Rozwiązanie

Łatwo podzielić kwadrat na 4 kwadraty. Po każdym takim podziale liczba kwadratów zwiększa się o 3. Stosując ten podział wielokrotnie możemy uzyskać wszystkie liczby postaci $4 + 3n$, gdzie $n \in \mathbf{N}_0$.

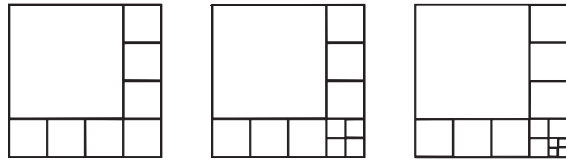


Rozpoczynając od podziału na 6 kwadratów i dzieląc kolejno dowolne powstałe kwadraty na 4 części możemy uzyskać wszystkie liczby postaci $6 + 3n$, gdzie $n \in \mathbf{N}_0$.





Jeśli podzielimy kwadrat na 8 części, to rozumując analogicznie uzyskujemy wszystkie liczby postaci $8 + 3n$, gdzie $n \in \mathbf{N}_0$.



Możemy więc podzielić kwadrat na 4, 6, 7, 8 i dowolną większą liczbę kwadratów.

3. Na okręgu o środku S opisano trapez $ABCD$ (o podstawach AB i CD). Wykaż, że

$$\frac{1}{AS^2} - \frac{1}{BS^2} = \frac{1}{CS^2} - \frac{1}{DS^2}.$$

Rozwiązanie

W dowolnym trapezie suma kątów przy każdym z ramion wynosi 180° , czyli

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC = 180^\circ.$$

Odcinki AS i DS są dwusiecznymi kątów, więc

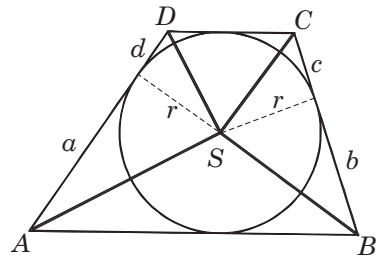
$$\sphericalangle SAD + \sphericalangle ADS = 90^\circ,$$

stąd trójkąt ASD jest prostokątny, w którym r jest wysokością poprowadzoną do przeciwprostokątnej AD . Oznaczmy części na które spodek wysokości r podzielił odcinek AD jako odcinki a i d .

Ponieważ wysokość r dzieli trójkąt prostokątny ASD na dwa trójkąty do niego podobne, więc

$$\frac{a}{r} = \frac{r}{d} \quad \text{czyli} \quad ad = r^2.$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla trójkąta BSC , uzyskujemy (przy oznaczeniach z rysunku) proporcję $\frac{b}{r} = \frac{r}{c}$, więc $bc = r^2$.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa oraz powyższych równości, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{DS^2} &= \frac{1}{a^2+r^2} + \frac{1}{d^2+r^2} = \frac{1}{a^2+ad} + \frac{1}{d^2+ad} = \\ &= \frac{1}{a(a+d)} + \frac{1}{d(a+d)} = \frac{d}{ad(a+d)} + \frac{a}{ad(a+d)} = \frac{a+d}{ad(a+d)} = \frac{1}{ad} = \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

Analogicznie

$$\frac{1}{BS^2} + \frac{1}{CS^2} = \frac{1}{bc} = \frac{1}{r^2}.$$

Z dwóch ostatnich równości, dostajemy

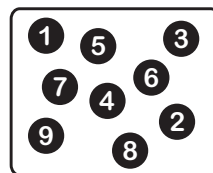
$$\frac{1}{AS^2} + \frac{1}{DS^2} = \frac{1}{BS^2} + \frac{1}{CS^2}$$

czyli

$$\frac{1}{AS^2} - \frac{1}{BS^2} = \frac{1}{CS^2} - \frac{1}{DS^2}.$$

4. Na stole leży 9 żetonów z numerami od ⟨1⟩ do ⟨9⟩.

Dwóch zawodników gra w następującą grę: pierwszy gracz w swoim ruchu usuwa ze stołu żeton z wybraną liczbą oraz wszystkie żetony z jej dzielnikami, następnie drugi wykonuje ruch według tych samych zasad itd. Wygrywa zawodnik, który zdejmie ze stołu ostatni żeton. Który z graczy (pierwszy czy drugi) ma strategię wygrywającą i na czym ona może polegać?



Rozwiązanie

Uzasadnimy, że jeśli pierwszy gracz w pierwszym swoim ruchu weźmie żeton oznaczony numerem ⟨7⟩, to jest w stanie zagwarantować sobie wygraną. Oznaczmy gracza pierwszego przez $G1$, a drugiego przez $G2$.

Rozważmy w takiej sytuacji wszystkie opcje ruchu drugiego gracza:

$G1$	$G2$	$G1$	pozostają żetony	dalsza rozgrywka
⟨7⟩	⟨9⟩	⟨8⟩	⟨5⟩ ⟨6⟩	po 2 ruchach wygrywa $G1$
⟨7⟩	⟨8⟩	⟨9⟩	⟨5⟩ ⟨6⟩	po 2 ruchach wygrywa $G1$
⟨7⟩	⟨6⟩	⟨6⟩	⟨5⟩ ⟨9⟩	po 2 ruchach wygrywa $G1$
⟨7⟩	⟨5⟩	⟨2⟩	⟨3⟩ ⟨4⟩ ⟨6⟩ ⟨8⟩ ⟨9⟩	dalsza rozgrywka opisana poniżej
⟨7⟩	⟨4⟩	⟨3⟩	⟨5⟩ ⟨6⟩ ⟨8⟩ ⟨9⟩	po 4 ruchach wygrywa $G1$
⟨7⟩	⟨3⟩	⟨4⟩	⟨5⟩ ⟨6⟩ ⟨8⟩ ⟨9⟩	po 4 ruchach wygrywa $G1$
⟨7⟩	⟨2⟩	⟨5⟩	⟨3⟩ ⟨4⟩ ⟨6⟩ ⟨8⟩ ⟨9⟩	dalsza rozgrywka opisana poniżej



Jeżeli po ruchu pierwszego gracza na stole zostaną żetony $\langle 3 \rangle$, $\langle 4 \rangle$, $\langle 6 \rangle$, $\langle 8 \rangle$, $\langle 9 \rangle$, to pierwszy gracz może osiągnąć zwycięstwo następująco:

G2	G1	pozostają żetony	dalsza rozgrywka
$\langle 9 \rangle$	$\langle 4 \rangle$	$\langle 6 \rangle$ $\langle 8 \rangle$	po 2 ruchach wygrywa G1
$\langle 8 \rangle$	$\langle 3 \rangle$	$\langle 6 \rangle$ $\langle 9 \rangle$	po 2 ruchach wygrywa G1
$\langle 6 \rangle$	$\langle 4 \rangle$	$\langle 8 \rangle$ $\langle 9 \rangle$	po 2 ruchach wygrywa G1
$\langle 4 \rangle$	$\langle 9 \rangle$	$\langle 6 \rangle$ $\langle 8 \rangle$	po 2 ruchach wygrywa G1
$\langle 3 \rangle$	$\langle 8 \rangle$	$\langle 6 \rangle$ $\langle 9 \rangle$	po 2 ruchach wygrywa G1

5. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p , dla których wartość wyrażenia

$$p^4 - 5p^2 + 4$$

nie jest podzielna przez 360.

Rozwiązanie

Przekształcając dane wyrażenie równoważnie, otrzymujemy

$$\begin{aligned} p^4 - 5p^2 + 4 &= (p^4 - 4p^2 + 4) - p^2 = (p^2 - 2)^2 - p^2 = \\ &= (p^2 - 2 - p)(p^2 - 2 + p) = (p - 2)(p + 1)(p + 2)(p - 1) = \\ &= (p - 2)(p - 1)(p + 1)(p + 2). \end{aligned}$$

Zauważmy, że liczba jest podzielna przez 360 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 5, 8 i 9. Jeżeli p jest liczbą całkowitą, to wśród liczb: $p - 2$, $p - 1$, p , $p + 1$, $p + 2$ dokładnie jedna jest podzielna przez 5 (ponieważ jest to pięć kolejnych liczb całkowitych).

■ Łatwo sprawdzić, że dla $p = 5$ wyrażenie dane w zadaniu nie jest podzielne przez 5. Jeśli p jest liczbą pierwszą różną od 5, to dokładnie jedna z liczb: $p - 2$, $p - 1$, $p + 1$, $p + 2$ jest podzielna przez 5, więc i dane wyrażenie dzieli się przez 5.

■ Jeśli p jest liczbą nieparzystą, to liczby $p - 1$ i $p + 1$ są kolejnymi liczbami parzystymi i jedna z nich dzieli się przez 4, więc ich iloczyn dzieli się przez 8, stąd i dane wyrażenie dzieli się przez 8. Jeśli natomiast $p = 2$ (jest to jedyna liczba pierwsza parzysta), to wartość danego wyrażenia jest równa 0. Czyli dla każdej liczby pierwszej p dane wyrażenie dzieli się przez 8.

■ Jeśli p jest liczbą podzielną przez 3, to wśród liczb: $p - 2$, $p - 1$, $p + 1$, $p + 2$ są dwie, które dzielą się przez 3, a zatem dane wyrażenie dzieli się przez 9. Łatwo sprawdzić, że dla $p = 3$ wyrażenie nie dzieli się przez 3.

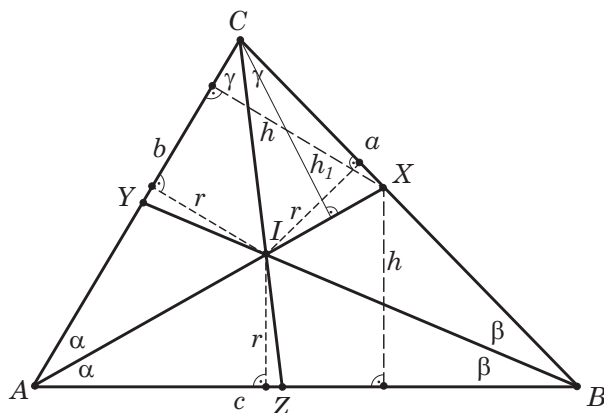
Na podstawie powyższych uwag, dane wyrażenie nie dzieli się przez 360 tylko dla $p = 3$ oraz $p = 5$.



6. Dany jest trójkąt o bokach długości a, b, c . Ustal, w jakich proporcjach środek okręgu wpisanego w ten trójkąt podzielił odcinki wycięte z dwusiecznych kątów trójkąta przez brzeg tego trójkąta.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku: A, B, C — wierzchołki trójkąta; I — środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC ; X, Y, Z — punkty przecięcia boków BC, AC, AB przez odpowiednie dwusieczne kątów trójkąta ABC . W dalszej części rozwiązania przez $[MNP]$ oznaczać będziemy pole trójkąta o wierzchołkach M, N, P .



Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , więc jest oddalony od każdego jego boku o r , gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego. Ponieważ punkt X leży na dwusiecznej kąta BAC , więc jest jednakowo oddalony od boków AB i AC . Przyjmijmy, że ta odległość jest równa h .

Trójkąty ACI i XCI mają wspólną wysokość h_1 , więc

$$[ACI] = \frac{1}{2} \cdot AI \cdot h_1 \quad \text{oraz} \quad [XCI] = \frac{1}{2} \cdot XI \cdot h_1$$

i jednocześnie

$$[ACI] = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot r \quad \text{oraz} \quad [XCI] = \frac{1}{2} \cdot CX \cdot r.$$

Stąd

$$(1) \quad \frac{[ACI]}{[XCI]} = \frac{AI}{XI} = \frac{CA}{CX}.$$

Analogicznie otrzymujemy

$$(2) \quad \frac{[BAX]}{[CAX]} = \frac{BX}{CX} = \frac{AB}{AC}.$$



Uwaga. Równości (1) i (2) można otrzymać bezpośrednio z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta.

Wykorzystując równość (2), otrzymujemy

$$\frac{a}{CX} = \frac{BC}{CX} = \frac{BC+CX}{CX} = \frac{BX}{CX} + 1 = \frac{AB}{AC} + 1 = \frac{c}{b} + 1 = \frac{c+b}{b}.$$

Stąd

$$(3) \quad CX = \frac{ab}{b+c}.$$

Wykorzystując teraz (1) i (3), dostajemy

$$\frac{AI}{XI} = \frac{b}{CX} = \frac{b(b+c)}{ab} = \frac{b+c}{a}.$$

Prowadząc analogicznie rozumowanie, otrzymujemy

$$\frac{BI}{YI} = \frac{a+c}{b} \quad \text{oraz} \quad \frac{CI}{ZI} = \frac{a+b}{c}.$$

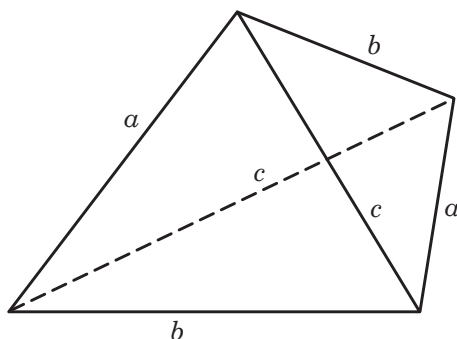
7. W czworościanie $ABCD$ krawędzie ściany ABC są odpowiednio równe:

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c,$$

a wszystkie pozostałe ściany są przystające do ściany ABC . Oblicz odległość między krawędziami AB i CD .

Rozwiązanie

Zauważmy, że w czworościanie opisanym w treści zadania w każdym jego wierzchołku schodzą się krawędzie o długościach a , b i c .



Poprowadźmy trzy pary płaszczyzn równoległych:

- płaszczyznę równoległą do krawędzi AB i zawierającą krawędź CD oraz płaszczyznę równoległą do krawędzi CD i zawierającą krawędź AB ,



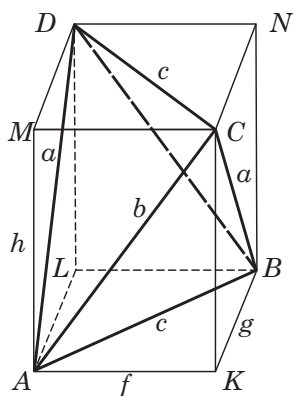
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



- parę płaszczyzn wyznaczonych przez krawędzie BC i AD ,
- parę płaszczyzn wyznaczonych przez krawędzie AC i BD .



Płaszczyzny te wyznaczają równoległościan $AKBLMCND$, w którym przeciwległe ściany są przystającymi równoległobokami. Zauważmy, że krawędzie czworościanu $ABCD$ są przekątnymi ścian otrzymanego równoległościanu. Każda para przeciwległych ścian ma obie przekątne tej samej długości, zatem równoległoboki muszą być prostokątami, czyli równoległościan $AKBLMCND$ jest prostopadłościanem. Oznaczmy jego krawędzie: $f = AK$, $g = AL$ i $h = AM$. Odległość między krawędziami AB i CD jest równa h . Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy zależności

$$\begin{cases} g^2 + h^2 = a^2 \\ h^2 + f^2 = b^2 \\ g^2 + f^2 = c^2. \end{cases}$$

Dodając dwa pierwsze równania stronami oraz wykorzystując trzecie, dostajemy

$$g^2 + h^2 + h^2 + f^2 = 2h^2 + c^2 = a^2 + b^2,$$

a stąd

$$h^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

$$h = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}.$$

