Koło Matematyczne Gimnazjalistów

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów www.omg.edu.pl

Zestaw 6

1. Znajdź wszystkie trójki (x,y,z) liczb rzeczywistych, które są rozwiązaniami równania

$$5(x^2+y^2+z^2)=4(xy+yz+zx).$$

Wskazówka

Można odpowiednio pogrupować wszystkie wyrazy równania i sprowadzi je do postaci sumy kwadratów porównywanej do zera.

2. Udowodnij, że dla każej liczby naturalnej $n \geqslant 6$ kwadrat można rozciąć na n kwadratów.

Wskazówka

Łatwo wykazać, że każdy kwadrat można podzielić na 4 oraz na 6, na 7 i na 8 kwadratów. To wystarczy do rozwiązania całego zadania.

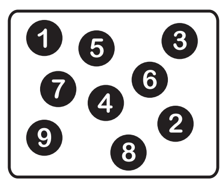
3. Na okręgu o środku S opisano trapez $ABCD$ (o podstawach AB i CD). Wykaż, że

$$\frac{1}{AS^2}-\frac{1}{BS^2}=\frac{1}{CS^2}-\frac{1}{DS^2}.$$

Wskazówka

Środek okręgu wpisanego w wielokąt leży na przecięciu dwusiecznych kątów tego wielokąta. Można zauważyć, że trójkąty ASD i BSC są prostokątne (dlaczego?) i wykorzystać ten fakt w rozwiązaniu zadania.

4. Na stole leży 9 żetonów z numerami od $\langle 1\rangle$ do $\langle 9\rangle$. Dwóch zawodników gra w następującą grę: pierwszy gracz w swoim ruchu usuwa ze stołu żeton z wybraną liczbą oraz wszystkie żetony z jej dzielnikami, następnie drugi wykonuje ruch według tych samych zasad itd. Wygrywa zawodnik, który zdejmie ze stołu ostatni żeton. Który z graczy (pierwszy czy drugi) ma strategię wygrywającą i na czym ona może polegać?



Wskazówka

Niezależnie od wybranego ruchu wśród żetonów usuwanych przez pierwszego gracza w pierwszym ruchu na pewno będzie żeton $\langle 1\rangle$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Czy może istnieć strategia wygrywająca dla drugiego gracza? Załóżmy, że tak. Oznacza to, że drugi gracz ma prowadzącą do zwycięstwa *ripost* na każde rozpoczęcie gry. W szczególności musi mieć taką taktykę w przypadku, gdy pierwszy gracz weźmie w pierwszym ruchu tylko żeton z numerem $\langle 1\rangle$. Ale gdyby taka taktyka dla drugiego gracza istniała (np. gdyby polegała na wzięciu żetonu z numerem $\langle n\rangle$), to pierwszy gracz mógłby ją *przejąć* biorąc żeton $\langle n\rangle$ w pierwszym ruchu (oczywiście wraz z żetonem $\langle 1\rangle$).
W grze zatem istnieje strategia wygrywająca dla pierwszego gracza. Trzeba jednak jeszcze ustalić, na czym ona polega.

5. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p, dla których wartość wyrażenia

$$p^4-5p^2+4$$

nie jest podzielna przez 360.

Wskazówka

Spróbuj sprowadzić wyrażenie p^4-5p^2+4 do postaci iloczynu czterech liczb całkowitych.

6. Dany jest trójkąt o bokach długości a, b, c. Ustal, w jakich proporcjach środek okręgu wpisanego w ten trójkąt podzielił odcinki wycięte z dwusiecznych kątów trójkąta przez brzeg tego trójkąta.

Wskazówka

Podpowiedzią niech będzie przypomnienie, że każdy punkt dwusiecznej kąta jest jednakowo oddalony od jego ramion. Można skorzystać z tej własności dla dwóch punktów — środka okręgu wpisanego i punktu przecięcia dwusiecznej z przeciwległym bokiem trójkąta.

7. W czworościanie $ABCD$ krawędzie ściany ABC są odpowiednio równe:

$$BC=a,\quad CA=b,\quad AB=c,$$

a wszystkie pozostałe ściany są przystające do ściany ABC. Oblicz odległość między krawędziami AB i CD.

Wskazówka

Rozwiązanie tego zadania bardzo ułatwi umieszczenie danego czworościanu w odpowiednio dobranym prostopadłościanie.