



Koło Matematyczne Gimnazjalistów

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej



Zestaw 7

1. Liczby a , b , c spełniają warunki:

$$(1) a + b + c = 20,$$

$$(2) \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{4}.$$

Obliczyć wartość wyrażenia

$$w = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

2. Wyznaczyć wszystkie pary (x, y) liczb rzeczywistych spełniające równanie

$$(x^4 + 1)(4y^4 + 1) = 8x^2y^2.$$

3. Niech p i q będą dwiema kolejnymi liczbami pierwszymi większymi od 2. Udowodnić, że liczba $p+q$ jest iloczynem co najmniej trzech (niekoniecznie różnych) liczb naturalnych większych od 1.

4. Liczby dodatnie a , b , c , d spełniają warunki:

$$(1) a \leq b \leq c \leq d,$$

$$(2) a + b + c + d \geq 1.$$

Wykazać, że prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 \geq 1.$$

5. W trójkąt ostrokątny ABC wpisano kwadrat tak, że dwa jego wierzchołki należą do boku AB , a dwa pozostałe do pozostałych boków trójkąta. Udowodnić, że pole tego kwadratu nie przekracza połowy pola trójkąta ABC .

6. Danych jest 70 różnych liczb całkowitych dodatnich, wśród których nie ma liczb większych od 200. Wykazać, że przynajmniej dwie z nich różnią się o 4 lub o 5, lub o 9.

7. Wykazać, że w każdym czworościanie istnieją takie trzy krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka, z których można zbudować trójkąt.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

