



## Zestaw 7 — szkice rozwiązań zadań

1. Liczby  $a, b, c$  spełniają warunki:

$$(1) a + b + c = 20,$$

$$(2) \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{4}.$$

Obliczyć wartość wyrażenia

$$w = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

*Rozwiązanie*

Korzystając z warunków (1) i (2), otrzymujemy

$$(a+b+c) \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5.$$

Przekształcając lewą stronę otrzymanej równości, mamy kolejno

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} &= 5 \\ \frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c+a}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{a+b}{a+b} &= 5 \\ \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 &= 5, \end{aligned}$$

stąd

$$w = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 2.$$

2. Wyznaczyć wszystkie pary  $(x, y)$  liczb rzeczywistych spełniające równanie

$$(x^4 + 1)(4y^4 + 1) = 8x^2y^2.$$

*Rozwiązanie*

*Sposób 1.*

Z nierówności  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  między średnią arytmetyczną i geometryczną dla dwóch liczb nieujemnych  $a$  i  $b$ , otrzymujemy

$$(1) \quad \frac{x^4 + 1}{2} \geq x^2 \quad \text{i} \quad \frac{4y^4 + 1}{2} \geq 2y^2.$$



W powyższych nierównościach zachodzą równości tylko wtedy, gdy

$$(2) \quad x^4 = 1 \quad \text{i} \quad 4y^4 = 1.$$

Na podstawie (1), otrzymujemy

$$(x^4 + 1)(4y^2 + 1) \geq 8x^2y^2,$$

przy czym równość

$$(x^4 + 1)(4y^2 + 1) = 8x^2y^2$$

zachodzi tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (2). Stąd rozwiązaniami danego układu są pary

$$\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

*Sposób 2.*

Zauważmy, że

$$(x^4 + 1)(4y^4 + 1) - 8x^2y^2 = 4x^4y^4 + x^4 + 4y^4 + 1 - 8x^2y^2 = (x^2 - 2y^2)^2 + (2x^2y^2 - 1)^2.$$

Stąd

$$(x^4 + 1)(4y^4 + 1) - 8x^2y^2 \geq 0,$$

przy czym w ostatniej nierówności zachodzi równość tylko wtedy, gdy

$$x^2 - 2y^2 = 0 \quad \text{i} \quad 2x^2y^2 - 1 = 0,$$

skąd

$$x^2 = 2y^2 \quad \text{i} \quad 2x^2y^2 = 1$$

$$x^2 = 2y^2 \quad \text{i} \quad x^4 = 1.$$

Dalsza część rozwiązania jak w sposobie 1.

---

**3.** Niech  $p$  i  $q$  będą dwiema kolejnymi liczbami pierwszymi większymi od 2. Udowodnić, że liczba  $p + q$  jest iloczynem co najmniej trzech (niekoniecznie różnych) liczb naturalnych większych od 1.

---

*Rozwiązanie*

Ponieważ liczby  $p$  i  $q$  są liczbami naturalnymi nieparzystymi, więc liczba  $\frac{p+q}{2}$  jest liczbą naturalną. Jeżeli  $p < q$ , to

$$2p < p + q < 2q$$

$$p < \frac{p+q}{2} < q.$$

Ponieważ  $p$  i  $q$  są dwiema kolejnymi liczbami pierwszymi nieparzystymi, to liczba  $\frac{p+q}{2}$  jest liczbą złożoną.



Zatem

$$\frac{p+q}{2} = m \cdot n$$

dla pewnych liczb naturalnych  $m > 1$  i  $n > 1$ . Oznacza to, że

$$p+q = 2 \cdot m \cdot n,$$

skąd teza zadania.

---

**4.** Liczby dodatnie  $a, b, c, d$  spełniają warunki:

(1)  $a \leq b \leq c \leq d$ ,

(2)  $a+b+c+d \geq 1$ .

Wykazać, że prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 \geq 1.$$

---

*Rozwiązanie*

Z nierówności  $a+b+c+d \geq 1$  wynika, że

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd \geq 1.$$

Korzystając teraz z warunku (1), dostajemy

$$2ab \leq 2b^2, \quad 2ac \leq 2c^2, \quad 2ad \leq 2d^2, \quad 2bc \leq 2c^2, \quad 2bd \leq 2d^2, \quad 2cd \leq 2d^2,$$

stąd

$$\begin{aligned} a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 &\geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 + 2c^2 + 2d^2 + 2d^2 \geq \\ &\geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd \geq 1. \end{aligned}$$

---

**5.** W trójkąt ostrokątny  $ABC$  wpisano kwadrat tak, że dwa jego wierzchołki należą do boku  $AB$ , a dwa pozostałe do pozostałych boków trójkąta. Udowodnić, że pole tego kwadratu nie przekracza połowy pola trójkąta  $ABC$ .

---

*Rozwiązanie*

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:

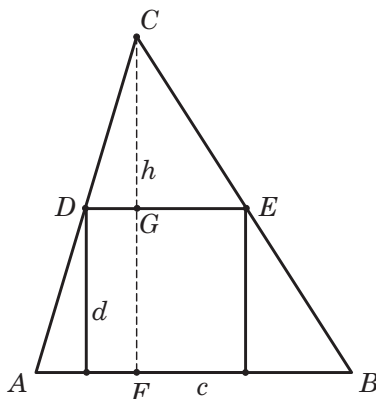
$AB = c$  — długość boku trójkąta, na którym leżą dwa wierzchołki kwadratu,

$CF = h$  — długość wysokości trójkąta  $ABC$  poprowadzonej z wierzchołka  $C$ ,

$d$  — długość boku kwadratu.

Z podobieństwa trójkątów  $ABC$  i  $DEC$ , otrzymujemy

$$\frac{AB}{DE} = \frac{CF}{CG} \quad \text{czyli} \quad \frac{c}{d} = \frac{h}{h-d}.$$



Stąd  $d = \frac{ch}{c+h}$ . Zatem pole kwadratu jest równe  $P_k = \frac{(ch)^2}{(c+h)^2}$ .

Dalszą część zadania rozwiążemy dwoma sposobami.

*Sposób 1.*

Z nierówności  $\sqrt{ch} \leq \frac{c+h}{2}$  między średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb dodatnich  $c$  i  $h$ , otrzymujemy

$$P_k = \frac{(ch)^2}{(c+h)^2} \leq \frac{(ch)^2}{4ch} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ch = \frac{1}{2} P_{ABC}.$$

*Sposób 2.*

Ponieważ

$$\begin{aligned} P_k - \frac{1}{2} P_{ABC} &= \frac{(ch)^2}{(c+h)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ch = \frac{4(ch)^2 - ch(c+h)^2}{4(c+h)^2} = \\ &= \frac{ch(4ch - c^2 - 2ch - h^2)}{4(c+h)^2} = \frac{ch(-c^2 + 2ch - h^2)}{4(c+h)^2} = -\frac{ch(c-h)^2}{4(c+h)^2} \leq 0, \end{aligned}$$

skąd

$$P_k \leq \frac{1}{2} P_{ABC}.$$

---

**6.** Danych jest 70 różnych liczb całkowitych dodatnich, wśród których nie ma liczb większych od 200. Wykazać, że przynajmniej dwie z nich różnią się o 4 lub o 5, lub o 9.

---

*Wskazówka*

Oznaczmy dane liczby  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{70}$ . Rozpatrzmy liczby

$$\begin{aligned} &a_1, a_2, a_3, \dots, a_{70}, \\ &a_1 + 4, a_2 + 4, a_3 + 4, \dots, a_{70} + 4, \\ &a_1 + 9, a_2 + 9, a_3 + 9, \dots, a_{70} + 9. \end{aligned}$$

Ponieważ liczby  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{70}$  są różne, więc również liczby  $a_1 + 4, a_2 + 4, a_3 + 4, \dots, a_{70} + 4$  oraz  $a_1 + 9, a_2 + 9, a_3 + 9, \dots, a_{70} + 9$  są różne. Razem wypisaliśmy 210 liczb całkowitych dodatnich, z których największa może być równa 209. Zatem co najmniej dwie spośród tych liczb są równe. Mogą zająć następujące trzy przypadki

- 1°  $a_i = a_j + 4$ , czyli  $a_i - a_j = 4$ ;
- 2°  $a_i = a_j + 9$ , czyli  $a_i - a_j = 9$ ;
- 3°  $a_i + 4 = a_j + 9$ , czyli  $a_i - a_j = 5$ .

Stąd wynika teza zadania.



---

**7.** Wykazać, że w każdym czworościanie istnieją takie trzy krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka, z których można zbudować trójkąt.

---

*Rozwiązanie*

Niech  $AB$  będzie najdłuższą krawędzią czworościanu  $ABCD$ . Wtedy każda z pozostałych krawędzi ma długość nie większą od  $AB$ . Zauważmy, że (na podstawie nierówności trójkąta dla trójkątów  $ABC$  i  $ABD$ ) zachodzą nierówności

$$AC + BC > AB \quad \text{i} \quad AD + BD > AB.$$

Stąd

$$\begin{aligned} AC + BC + AD + BD &> 2AB \\ (AC + AD - AB) + (BC + BD - AB) &> 0. \end{aligned}$$

Suma dwóch liczb jest dodatnia, jeżeli co najmniej jedna z nich jest dodatnia, a zatem

$$AC + AD - AB > 0 \quad \text{lub} \quad BC + BD - AB > 0,$$

czyli

$$AC + AD > AB \quad \text{lub} \quad BC + BD > AB.$$

Oznacza to, że z odcinków  $AB, AC, AD$  lub  $BC, BD, BA$  można zbudować trójkąt.

