



Koło Matematyczne Gimnazjalistów

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej



Zestaw 8

1. Wykaż, że dla każdych liczb rzeczywistych a , b i c zachodzi równość

$$(a|b| - b|a|)(b|c| - c|b|)(c|a| - a|c|) = 0.$$

2. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n , które spełniają nierówności

$$\frac{2010}{\sqrt{n+10}} < \sqrt{n-10} < \frac{2011}{\sqrt{n+10}}.$$

3. Każdą z liczb 1, 2, 3, ..., 32, 33 zapisano na oddzielnej kartce. Jaś twierdzi, że potrafi rozłożyć te kartki w jedenastu pudełkach — po trzy w każdym pudełku — tak, aby w każdym pudełku suma liczb zapisanych na dwóch kartkach była równa liczbie zapisanej na trzeciej kartce. Małgosia twierdzi, że jest to niemożliwe. Kto ma rację: Jaś czy Małgosia? Odpowiedź uzasadnij.

4. Rozstrzygnij, czy istnieje pięć kolejnych liczb całkowitych, których suma kwadratów jest kwadratem liczby całkowitej.

5. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym krawędzie AD i BC są równej długości. Punkty M , N , P , Q są środkami krawędzi odpowiednio AB , BD , DC , CA . Wykaż, że odcinki MP i NQ mają punkt wspólny i są prostopadłe.

6. Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Punkt M jest takim punktem boku AC , że $MC = 2 \cdot MA$. Punkty K i L dzielą bok BC na trzy równe części. Wykaż, że

$$\sphericalangle AKM + \sphericalangle ALM = 30^\circ.$$

7. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{(n+1)^{n-1} \cdot (n-1)^{n+1}} < n^n.$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

