



Zestaw 8 — szkice rozwiązań zadań

1. Wykaż, że dla każdych liczb rzeczywistych a , b i c zachodzi równość

$$(a|b| - b|a|)(b|c| - c|b|)(c|a| - a|c|) = 0.$$

Rozwiązanie

Zbadamy dwa przypadki.

Przypadek 1°

Co najmniej jedna z liczb a , b , c jest równa zero. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że jest to liczba a . Wtedy

$$a \cdot |b| - b \cdot |a| = 0 \cdot |b| - b \cdot |0| = 0,$$

stąd równość dana w zadaniu jest spełniona.

Przypadek 2°

Każda z liczb a , b , c jest różna od zera. Wtedy co najmniej dwie z tych liczb są tego samego znaku (dodatnie lub ujemne). Niech to będą liczby a i b .

Jeśli liczby a i b są dodatnie, to $|a| = a$ i $|b| = b$, stąd

$$a \cdot |b| - b \cdot |a| = a \cdot b - b \cdot a = 0,$$

a zatem równość dana w zadaniu jest spełniona.

Jeśli liczby a i b są ujemne, to $|a| = -a$ i $|b| = -b$, stąd

$$a \cdot |b| - b \cdot |a| = a \cdot (-b) - b \cdot (-a) = -a \cdot b - b \cdot (-a) = -ab + ab = 0.$$

Jak widać i w tym przypadku równość dana w zadaniu jest spełniona. Kończy to rozwiązanie zadania.

2. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n , które spełniają nierówności

$$\frac{2010}{\sqrt{n+10}} < \sqrt{n-10} < \frac{2011}{\sqrt{n+10}}.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że musi być spełniona nierówność $n - 10 \geq 0$, stąd $n \geq 10$. Wtedy dane nierówności możemy zapisać w sposób równoważny

$$2010 < \sqrt{(n-10)(n+10)} < 2011$$

$$2010^2 < n^2 - 100 < 2011^2$$



$$2010^2 + 100 < n^2 < 2011^2 + 100.$$

Ponieważ

$$2010^2 < 2010^2 + 100 < n^2 < 2011^2 + 100 < 2012^2,$$

więc $n^2 = 2011^2$, a stąd $n = 2011$.

3. Każdą z liczb 1, 2, 3, ..., 32, 33 zapisano na oddzielnej kartce. Jaś twierdzi, że potrafi rozłożyć te kartki w jedenastu pudełkach — po trzy w każdym pudełku — tak, aby w każdym pudełku suma liczb zapisanych na dwóch kartkach była równa liczbie zapisanej na trzeciej kartce. Małgosia twierdzi, że jest to niemożliwe. Kto ma rację: Jaś czy Małgosia? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Pokażemy, że rację ma Małgosia. Gdyby rację miał Jaś, to suma liczb w każdym pudełku byłaby parzystą. Rzeczywiście, jeśli w dowolnie wybranym pudełku znajdują się kartki z liczbami a , b , c i $a + b = c$, to

$$a + b + c = c + c = 2c.$$

Wtedy suma wszystkich liczb na kartkach musiałaby być liczbą parzystą. Jednak

$$1 + 2 + 3 + \dots + 32 + 33 = (1 + 33) + (2 + 32) + (3 + 31) + \dots + (16 + 18) + 17.$$

Suma liczb w każdym z nawiasów jest liczbą parzystą, stąd suma wszystkich liczb na kartkach jest liczbą nieparzystą. Oznacza to, że Jaś nie ma racji.

4. Rozstrzygnij, czy istnieje pięć kolejnych liczb całkowitych, których suma kwadratów jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Zauważmy, że pięć kolejnych liczb całkowitych można zapisać w postaci: $n - 2$, $n - 1$, n , $n + 1$, $n + 2$, gdzie n jest liczbą całkowitą. Stąd

$$(n - 2)^2 + (n - 1)^2 + (n)^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = 5n^2 + 10.$$

Wiadomo, że kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 4 daje resztę 0 lub 1. W dalszej części zadania posłużymy się kongruencjami (można o tym przeczytać np. w broszurze: *I Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów*).

Jeżeli $n \equiv 0 \pmod{4}$, to $5n^2 + 10 \equiv 10 \equiv 2 \pmod{4}$;

jeżeli $n \equiv 1 \pmod{4}$, to $5n^2 + 10 \equiv 15 \equiv 3 \pmod{4}$;

jeżeli $n \equiv 2 \pmod{4}$, to $5n^2 + 10 \equiv 30 \equiv 2 \pmod{4}$;

jeżeli $n \equiv 3 \pmod{4}$, to $5n^2 + 10 \equiv 55 \equiv 3 \pmod{4}$.

Jak widać w żadnym z przypadków nie otrzymujemy ani reszty 0, ani reszty 1. Stąd liczba ta nie może być kwadratem liczby całkowitej.

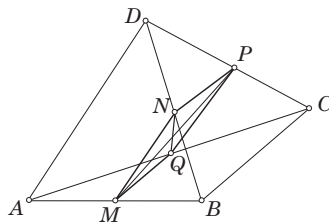


5. Dany jest czworóścian $ABCD$, w którym krawędzie AD i BC są równej długości. Punkty M, N, P, Q są środkami krawędzi odpowiednio AB, BD, DC, CA . Wykaż, że odcinki MP i NQ mają punkt wspólny i są prostopadłe.

Rozwiązanie

Skorzystamy z twierdzenia o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta, które mówi:

W każdym trójkącie odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i jego długość jest równa połowie długości trzeciego boku tego trójkąta.



Na podstawie powyższego twierdzenia, mamy

$$MN \parallel AD \text{ i } MN = \frac{1}{2}AD \text{ oraz } PQ \parallel AD \text{ i } PQ = \frac{1}{2}AD,$$

więc odcinki MN i PQ są równoległe, a zatem zawierają się w jednej płaszczyźnie. Oznacza to, że czworokąt $MNPQ$ (równoległobok!) zawiera się w jednej płaszczyźnie, stąd odcinki MP i NQ (przekątne tego czworokąta) mają punkt wspólny. Wykażemy teraz, że te odcinki są prostopadłe. Wykorzystując fakt, że $AD = BC$, otrzymujemy

$$MN = PQ = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = MQ = NP,$$

czyli czworokąt $MNPQ$ jest rombem, a wiadomo, że przekątne rombu są prostopadłe. Kończy to rozwiązanie zadania.

6. Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Punkt M jest takim punktem boku AC , że $MC = 2 \cdot MA$. Punkty K i L dzielą bok BC na trzy równe części. Wykaż, że

$$\sphericalangle AKM + \sphericalangle ALM = 30^\circ.$$

Rozwiązanie

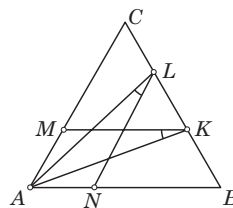
Wybermy na boku AB taki punkt N , że $NB = 2 \cdot NA$.

Przyjmijmy też położenie punktów K i L na boku BC

tak, jak na rysunku obok. Ponieważ $\frac{CL}{LB} = \frac{AN}{NB}$, więc

$LN \parallel AC$. Ponadto $\frac{CM}{AM} = \frac{CK}{BK}$, więc $MK \parallel AB$, a stąd

$$\sphericalangle BNL = 60^\circ = \sphericalangle KMC.$$



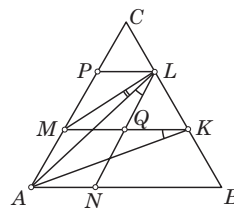
Zatem

$$\sphericalangle ANL = \sphericalangle AMK = 120^\circ.$$



Ponadto $AN = AM$ i $LN = KM$. Oznacza to, że trójkąty AMK i ANL są przystające, stąd $\sphericalangle AKM = \sphericalangle ALN$.

Wybermy teraz na boku AC taki punkt P , że $AP = 2 \cdot CP$. Niech ponadto punkt Q będzie punktem przecięcia odcinków MK i LN . Zauważmy, że czworokąt $MQLP$ jest rombem o kącie ostrym równym 60° . Ponieważ przekątne w rombie są dwusiecznymi kątów, więc



$$\sphericalangle AKM + \sphericalangle ALM = \sphericalangle ALN + \sphericalangle ALM = \sphericalangle QLM = 30^\circ.$$

7. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{(n+1)^{n-1} \cdot (n-1)^{n+1}} < n^n.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich n mamy

$$(n+1)^{n-1} \cdot (n-1)^{n+1} = (n+1)^n \cdot (n-1)^n \cdot \frac{n-1}{n+1}.$$

Ponieważ $\frac{n-1}{n+1} < 1$, więc

$$(n+1)^{n-1} \cdot (n-1)^{n+1} < (n+1)^n \cdot (n-1)^n = (n^2 - 1)^n < (n^2)^n = n^{2n},$$

a stąd

$$\sqrt{(n+1)^{n-1} \cdot (n-1)^{n+1}} < n^n.$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

