Koło Matematyczne Gimnazjalistów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Zestaw 9 — szkice rozwiazań zadań

1. Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb całkowitych spełniających układ równań

$$\begin{cases} ab+c=2011 \\ a+bc=2012. \end{cases}$$

Rozwiązanie

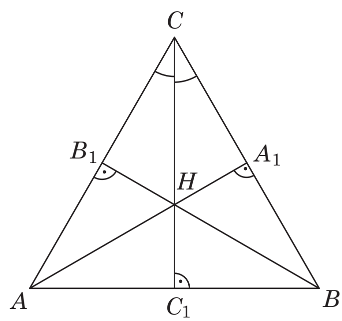
Odejmując stronami równania danego układu, otrzymujemy $a-ab+bc-c=1$, stąd $(a-c)(1-b)=1$. Ponieważ $1=1\cdot 1=(-1)\cdot(-1)$, więc powyższa równość jest równoważna alternatywie układów równań

$$\begin{cases} a-c=1 \\ 1-b=1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a-c=-1 \\ 1-b=-1. \end{cases}$$

Z pierwszego układu dostajemy $b=0$, stąd $a=2012$ i $c=2011$. Z drugiego układu otrzymujemy $b=2$ oraz $c=a+1$, stąd $2a+a+1=2011$, czyli $a=670$ oraz $c=671$. Stąd szukanymi trójkami liczb są: $(a,b,c)=(2012,0,2011)$ oraz $(a,b,c)=(670,2,671)$. Bezpośrednim podstawieniem sprawdzamy, że trójki te spełniają warunki zadania.

2. Wysokości AA_1, BB_1, CC_1 trójkąta ostrokątnego ABC przecinają się w punkcie H. Wykaż, że jeżeli $HA_1=HB_1=HC_1$, to trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym.

Rozwiązanie



Niech $HA_1=HB_1$. Trójkąty HA_1C i HB_1C są prostokątne, więc

$$A_1C^2=HC^2-HA_1^2=HC^2-HB_1^2=B_1C^2,$$

czyli $A_1C=B_1C$. Stąd trójkąty HA_1C i HB_1C są trójkątami przystającymi, więc

$$\sphericalangle HCA_1=\sphericalangle HCB_1.$$

Na podstawie cechy *kąt-bok-kąt* stwierdzamy, że trójkąty CC_1A i CC_1B są trójkątami przystającymi, skąd $AC=BC$.
Analogicznie dowodzimy, że $AB=AC$, więc trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym.

3. Liczby x, y, z są takimi liczbami rzeczywistymi, że $(x+y)(y+z)(z+x)\neq 0$. Wykaż, że prawdziwa jest równość

$$\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}+\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{y-z}{y+z}\cdot\frac{z-x}{z+x}=0.$$

Rozwiązanie

Po sprowadzeniu lewej strony równości do wspólnego mianownika, licznik otrzymanego ułamka jest równy

$$(x-y)(y+z)(z+x)+(y-z)(x+y)(z+x)+(z-x)(x+y)(y+z)+(x-y)(y-z)(z-x).$$

Wymnażając nawiasy, otrzymujemy

$$\begin{aligned}&(xy+xz-y^2-yz)(z+x)+(xy+y^2-xz-yz)(z+x)+\\&\qquad+(xz+yz-x^2-xy)(y+z)+(xy-xz-y^2+yz)(z-x)=\\&=xyz+x^2y+xz^2+x^2z-y^2z-xy^2-yz^2-xyz+\\&\quad+xyz+x^2y+y^2z+xy^2-xz^2-x^2z-yz^2-xyz+\\&\quad+xyz+xz^2+y^2z+yz^2-x^2y-x^2z-xy^2-xyz+\\&\quad+xyz-x^2y-xz^2+x^2z-y^2z+xy^2+yz^2-xyz=0,\end{aligned}$$

a zatem równość dana w zadaniu jest prawdziwa.

4. Dane są liczby

$$A=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}\quad\text{oraz}\quad B=\frac{2}{xy+1},$$

gdzie x i y są takimi liczbami rzeczywistymi, że $x\neq y$ i $xy+1\neq 0$. Wyznacz $A+B$, jeśli wiadomo, że $A=B$.

Rozwiązanie

Wychodząc od równości $A=B$, dostajemy kolejno:

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1}$$

$$\frac{x^2+y^2+2}{x^2y^2+x^2+y^2+1}=\frac{2}{xy+1}$$

$$x^3y+xy^3+2xy+x^2+y^2+2=2x^2y^2+2x^2+2y^2+2$$

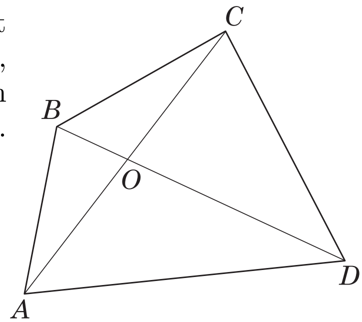
$$xy(x^2-2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)=0$$

$$(x-y)^2(xy-1)=0.$$

Ponieważ, zgodnie z założeniem, $x\neq y$, więc $xy=1$. Wtedy $A=B=\dfrac{2}{1+1}=1$, a stąd $A+B=2$.

5. Dany jest czworokąt wypukły, którego kolejne boki mają długości: 48, 49, 51, 52. Wykaż, że suma długości przekątnych tego czworokąta jest większa od 100.

Rozwiązanie



Niech danym czworokątem będzie taki czworokąt $ABCD$, w którym: $AB = 48$, $BC = 49$, $CD = 51$, $AD = 52$. Niech ponadto punkt O będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD tego czworokąta. Korzystając z nierówności trójkąta, dostajemy:

$$AO + BO > 48$$
$$BO + CO > 49$$
$$CO + DO > 51$$
$$DO + AO > 52.$$

Dodając otrzymane nierówności stronami, otrzymujemy

$$2(AO + BO + CO + DO) > 200,$$

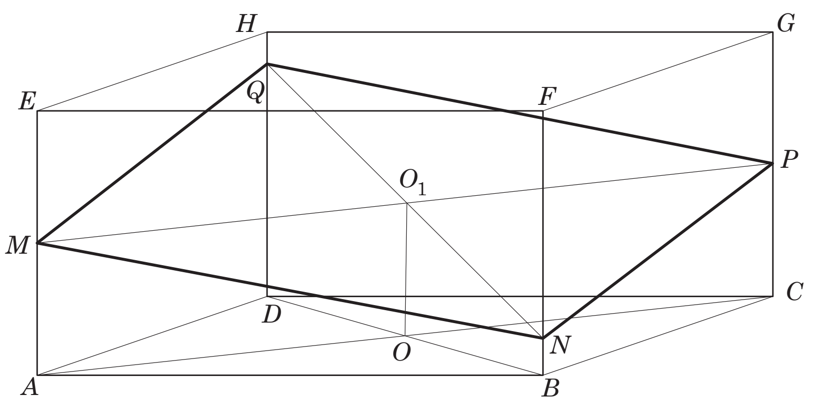
stąd

$$AC + BD > 100.$$

6. Dany jest prostopadłościan o podstawach $ABCD$ i $EFGH$. Płaszczyzna przecina jego krawędzie boczne AE, BF, CG i DH odpowiednio w punktach M, N, P i Q. Wykaż, że

$$AM + CP = BN + DQ.$$

Rozwiązanie



Ponieważ odcinki MQ i NP zawierają się w jednej płaszczyźnie i jednocześnie zawierają się w płaszczyznach rónoległych, więc są to odcinki równoległe.

Analogicznie równoległe są odcinki MN i PQ. Stąd czworokąt $MNPQ$ jest równoległobokiem.
Niech ponadto punkt O będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD podstawy $ABCD$, a O_1 — punktem przecięcia przekątnych MP i NQ równoległoboku $MNPQ$. Zauważmy, że odcinek OO_1 jest odcinkiem łączącym środki nierównoległych boków trapezów $ACPM$ i $BNQD$. Jest on równoległy do boków równoległych tych trapezów oraz

$$OO_1 = \frac{1}{2}(AM + CP) = \frac{1}{2}(BN + DQ),$$

stąd

$$AM + CP = BN + DQ.$$

---

7. Na tablicy napisano liczby: 1, 2, 4, 5. Operacja polega na wybraniu dwóch liczb a i b — spośród napisanych na tablicy — i zastąpieniu ich liczbami $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ i $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Czy po pewnej liczbie takich operacji można otrzymać na tablicy liczby: 1, $2\sqrt{2}$, 3, $4\sqrt{2}$? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{2} + \frac{a^2-2ab+b^2}{2} = a^2 + b^2.$$

Jeżeli na tablicy zapisane były liczby: a, b, c i d, to po operacji na tablicy zapisane są liczby: $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)$, c i d. Ale

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 + c^2 + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

a zatem operacja opisana w zadaniu nie zmienia sumy kwadratów liczb zapisanych na tablicy.
Ponieważ

$$1^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 = 46 \quad \text{oraz} \quad 1^2 + (2\sqrt{2})^2 + 3^3 + (4\sqrt{2})^2 = 50,$$

więc odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu jest negatywna.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY