Koło Matematyczne Gimnazjalistów

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

www.omg.edu.pl

Zestaw 10 — szkice rozwiazań zadań

---

1. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} (x+y)(x+y+z)=72 \\ (y+z)(x+y+z)=120 \\ (z+x)(x+y+z)=96. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Dodając równania danego układu stronami i wyłączając wspólny czynnik przed nawias, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (x+y+z)(x+y+y+z+z+x) &= 288 \\ 2(x+y+z)(x+y+z) &= 288 \\ (x+y+z)^2 &= 144, \end{aligned}$$

stąd

$$x+y+z=12 \quad \text{lub} \quad x+y+x=-12.$$

Jeżeli $x+y+z=12$, to dany w zadaniu układ równań możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} x+y &= 6 \\ y+z &= 10 \\ z+x &= 16, \end{aligned}$$

skąd $x=2,\ y=4,\ z=6$.

Postępując analogicznie w przypadku drugim, gdy $x+y+z=-12$, dostajemy $x=-2,\ y=-4,\ z=-6$. Bezpośrednim podstawieniem sprawdzamy, że obie trójki liczb są rozwiązaniami danego układu równań.

---

2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność:

$$a^2+b^2+1 \geqslant ab+a+b.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca &= \frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2) = \\ &= \frac{1}{2}\Big((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\Big) \geqslant 0, \end{aligned}$$

stąd dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i c prawdziwa jest nierówność

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca.$$

Przyjmując w tej nierówności $c=1$, dostajemy tezę.

---

3. Mały majsterkowicz Kazio przygotował na szkolną dyskotekę efekty świetlne własnego pomysłu. Żarówki, których jest 1000 i które są ponumerowane liczbami od 1 do 1000, są włączane i wyłączane specjalnym przełącznikiem. Kolejne k-te naciśnięcie przełącznika zmienia stan wszystkich żarówek o numerach podzielnych przez k. Na początku dyskoteki wszystkie żarówki były wyłączone. Pierwsze naciśnięcie przełącznika zapala wszystkie żarówki. Drugie naciśnięcie gasi wszystkie żarówki o numerach parzystych. Po trzecim użyciu przełącznika świecą się żarówki o numerach nieparzystych i jednocześnie niepodzielnych przez 3 oraz o numerach parzystych i podzielnych przez 3. Pod koniec dyskoteki okazało się, że Kazio naciskał przełącznik 1000 razy. Które żarówki świeciły się po zakończeniu dyskoteki?

Rozwiązanie

Zauważmy, że stan k-tej żarówki zmienia się tyle razy ile dzielników naturalnych ma liczba k. Zatem po zakończeniu dyskoteki będą się świeciły żarówki o numerach, które mają nieparzystą liczbę dzielników. Wykażemy, że takimi liczbami są kwadraty liczb naturalnych. Rozpatrzmy liczbę k, która ma parzystą liczbę dzielników:

$$d_1 < d_2 < \ldots < d_{2n-1} < d_{2n}.$$

Wówczas

$$k = d_1 \cdot d_{2n} = d_2 \cdot d_{2n-1} = \ldots = d_n \cdot d_{n+1},$$

stąd liczba k nie jest kwadratem liczby naturalnej. Jeśli liczba k ma nieparzystą liczbę dzielników:

$$d_1 < d_2 < \ldots < d_{n+1} < \ldots < d_{2n+1},$$

to

$$k = d_1 \cdot d_{2n+1} = d_2 \cdot d_{2n} = \ldots = d_{n+1}^2 = \ldots = d_n \cdot d_{n+2}.$$

Liczba k jest w tym przypadku kwadratem liczby naturalnej. Zatem, po dyskotece bądą świeciły się żarówki o numerach: 1, 4, 9, 16, …, 30^2, 31^2.

---

4. Czy istnieją takie dwie liczby x i y, aby jednocześnie zachodziły równości:

$$x(y-x)=3 \quad \text{i} \quad y(4y-3x)=2.$$

Odpowiedź uzasadnij.

Załóżmy, że takie liczby istnieją. Odejmując stronami dane równania, dostajemy:

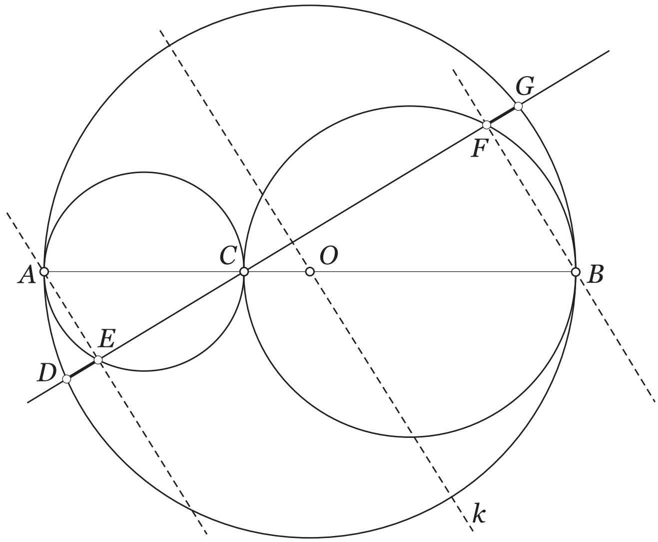
$$xy - x^2 - 4y^2 + 3xy = 1$$
$$-(x^2 - 4xy + 4y^2) = 1$$
$$(x-2y)^2 = -1.$$

Ostatnia równość nie może zachodzić, bo kwadrat liczby nie może być liczbą ujemną. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że takie liczby nie istnieją.

---

5. Punkt C leży wewnątrz odcinka AB. Niech okręgi o_1, o_2 i o będą okręgami o średnicach odpowiednio AC, BC i AB. Prosta k przechodzi przez punkt C i przecina okręgi w pięciu punktach D, E, C, F, G, położonych na tej prostej w wymienionej kolejności. Wykaż, że odcinki DE i FG są równej długości.

Rozwiązanie



Niech punkt E należy do okręgu o_1, punkt F — do okręgu o_2 oraz niech punkt O będzie środkiem okręgu o. Kąt wpisany w okrąg oparty na średnicy jest kątem prostym, więc $AE \perp DG$ i $BF \perp DG$. Proste AE i BF są zatem równoległe i przechodzą przez końce średnicy AB okręgu o. Punkt O, będący środkiem okręgu o, jest jednakowo oddalony od prostych AE i BF. Niech prosta k będzie prostą przechodzącą przez punkt O i równoległą do prostych AE i BF. Jest zatem ta prosta osią symetrii fgury otworzonej z prostych AE i BF, okręgu o, oraz prostej DG. Stąd odcinki DE i FG są symetryczne względem prostej k, czyli mają tę samą długość.

6. Pewna liczba naturalna ma w układzie dziesiętnym postać $\overline{x0yz}$, gdzie x, y, z są cyframi oraz $x>0$. Liczba ta podzielona przez pewną liczbę naturalną n daje iloraz, który w układzie dziesiętnym jest postaci $\overline{xyz}$. Znaleźć x, y, z oraz n.

Rozwiązanie

Niech

$$\overline{x0yz}=1000x+10y+z \quad \text{oraz} \quad \overline{xyz}=100x+10y+z.$$

Zgodnie z warunkami zadania zachodzi równość

$$1000x+10y+z=n\cdot(100x+10y+z),$$

którą możemy zapisać równoważnie

$$100x(10-n)=(10y+z)(n-1). \tag{1}$$

Jeśli $n\geqslant 11$, to równość (1) zachodzić nie może, bo lewa strona byłaby ujemna, a prawa dodatnia. Analogicznie, równość (1) zachodzić nie może, gdy $n\leqslant 5$, bo wtedy lewa strona równości jest równa co najmniej 500, a prawa jest mniejsza od 400. Stąd możliwe wartości n należą do zbioru $\{6, 7, 8, 9, 10\}$.
Zbadamy teraz te pięć możliwych przypadków:

(a) Niech $n=6$. Równość (1) przyjmuje wtedy postać $80x=10y+z$. Lewa strona otrzymanej równości jest podzielna przez 10, więc jej prawa strona też musi być podzielna przez 10. Stąd $z=0$, a wtedy $x=1$ i $y=8$.

(b) Jeżeli $n=7$, to równość (1) możemy zapisać $50x=10y+z$. Rozumując podobnie jak w punkcie (a), dostajemy: $z=0$, $x=1$, $y=5$.

(c) Jeśli $n=8$, to zależność (1) przyjmuje postać $200x=7(10y+z)$. Wtedy może być jedynie $x=7$ i stąd $200=10y+z$. Jednak ta równość zachodzić nie może, bo $10y+z\leqslant 99<200$.

(d) Niech $n=9$. Równość (1) możemy zapisać w postaci $25x=20y+2z$, stąd z musi być podzielna przez 5, czyli $z=0$ lub $z=5$.
Gdy $z=0$, to poprzez rozumowanie jak w przypadku (a), otrzymujemy $x=4$ i $y=5$; gdy natomiast $z=5$, to dostajemy równość $5x=4y+2$, której prawa strona jest parzysta ni niepodzielna przez 4. Stąd może być $x=2$ lub $x=6$. Dla $x=2$ otrzymujemy $y=2$, a dla $x=6$ dostajemy $y=7$.

(e) Jeżeli $n=10$, równość (1) przyjmuje postać $100x\cdot 0=9(10y+z)$. Równość ta zachodzi dla każdej liczby $x\in\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Wtedy $10y+z=0$, a stąd $y=z=0$.
Reasumując, dla poszczególnych wartości n, otrzymujemy następujące rozwiązania (x,y,z): dla $n=6$ mamy $(1,8,0)$, dla $n=7$ mamy $(1,5,0)$, dla $n=9$ mamy $(4,5,0)$ lub $(2,2,5)$, lub $(6,7,5)$, a dla $n=10$ mamy $(x,0,0)$, gdzie $x\in\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$.

7. Rozstrzygnij czy istnieje wielościan o sześciu ścianach i siedmiu wierzchołkach.

Rozwiązanie

Taki wielościan istnieje — zobacz rysunek poniżej. Punkty: A, C, F, G i D leżą w jednej płaszczyźnie.