Zestaw 10

1. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} (x+y)(x+y+z)=72 \\ (y+z)(x+y+z)=120 \\ (z+x)(x+y+z)=96. \end{cases}$$

Wskazówka

Dodaj równania danego układu stronami i wyłącz przed nawias wspólny czynnik, którym jest wyrażenie $x+y+z$.

2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność:

$$a^2+b^2+1 \geqslant ab+a+b.$$

Wskazówka

Najpierw udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych a, b i c prawdziwa jest nierówność $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$.

3. Mały majsterkowicz Kazio przygotował na szkolną dyskotekę efekty świetlne własnego pomysłu. Żarówki, których jest 1000 i które są ponumerowane liczbami od 1 do 1000, są włączane i wyłączane specjalnym przełącznikiem. Kolejne k-te naciśnięcie przełącznika zmienia stan wszystkich żarówek o numerach podzielnych przez k. Na początku dyskoteki wszystkie żarówki były wyłączone. Pierwsze naciśnięcie przełącznika zapala wszystkie żarówki. Drugie naciśnięcie gasi wszystkie żarówki o numerach parzystych. Po trzecim użyciu przełącznika świecą się żarówki o numerach nieparzystych i jednocześnie niepodzielnych przez 3 oraz o numerach parzystych i podzielnych przez 3. Pod koniec dyskoteki okazało się, że Kazio naciskał przełącznik 1000 razy. Które żarówki świeciły się po zakończeniu dyskoteki?

Wskazówka

Przeanalizuj, co dzieje się z jedną konkretną żarówką podczas całej dyskoteki. Ile razy zmienia się jej stan?

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

4. Czy istnieją takie dwie liczby x i y, aby jednocześnie zachodziły równości:

$$x(y-x)=3 \quad \text{i} \quad y(4y-3x)=2.$$

Odpowiedź uzasadnij.

Wskazówka

Odejmij równania stronami.

5. Punkt C leży wewnątrz odcinka AB. Niech okręgi o_1, o_2 i o będą okręgami o średnicach odpowiednio AC, BC i AB. Prosta k przechodzi przez punkt C i przecina okręgi w pięciu punktach D, E, C, F, G, położonych na tej prostej w wymienionej kolejności. Wykaż, że odcinki DE i FG są równej długości.

Wskazówka

Niech punkt E należy do okręgu o_1, a punkt F — do okręgu o_2. Pod jakim kątem prosta EF przecina proste AE i BF?

6. Pewna liczba naturalna w układzie dziesiętnym ma postać $\overline{x0yz}$, gdzie x, y, z są cyframi oraz $x>0$. Liczba ta podzielona przez pewną liczbę naturalną n daje iloraz, który w układzie dziesiętnym jest postaci $\overline{xyz}$. Znaleźć x, y, z oraz n.

Wskazówka

Uzasadnij, że n jest liczbą należącą do zbioru $\{6, 7, 8, 9, 10\}$, a następnie rozpatrz każdy z tych przypadków.

7. Rozstrzygnij czy istnieje wielościan o sześciu ścianach i siedmiu wierzchołkach.

Wskazówka

Taki wielościan istnieje.