VI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia drugiego
(8 stycznia 2011 r.)

1. Dany jest taki pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym pola trójkątów ABD, BCE, CDA, DEB i EAC są równe. Wykaż, że każda przekątna tego pięciokąta jest równoległa do pewnego jego boku.

2. Dane są dodatnie liczby całkowite a i b. Wykaż, że jeżeli liczba a^2 jest podzielna przez liczbę $a+b$, to także liczba b^2 jest podzielna przez liczbę $a+b$.

3. W turnieju tenisa stołowego wzięło udział n zawodników ($n \geqslant 4$). Każdy zawodnik rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, żaden mecz nie zakończył się remisem. Po turnieju wszyscy zawodnicy usiedli przy okrągłym stole w taki sposób, że każdy zawodnik wygrał z osobą siedzącą obok niego z jego lewej strony. Wykaż, że istnieją tacy trzej zawodnicy A, B i C, że A wygrał z B, B wygrał z C oraz C wygrał z A.

4. Udowodnij, że dla każdych liczb x, y należących do przedziału $(0,1)$ spełniona jest nierówność

$$x(1-y)^2+y(1-x)^2<(1-xy)^2\,.$$

5. Dany jest czworościan foremny opisany na sferze o promieniu 1. Udowodnij, że w tym czworościanie można umieścić 6 kul o promieniu $\frac{1}{2}$, w taki sposób, aby każde dwie kule miały co najwyżej jeden punkt wspólny.