



## VI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia drugiego

(8 stycznia 2011 r.)



### Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Dany jest taki pięciokąt wypukły  $ABCDE$ , w którym pola trójkątów  $ABD$ ,  $BCE$ ,  $CDA$ ,  $DEB$  i  $EAC$  są równe. Wykaż, że każda przekątna tego pięciokąta jest równoległa do pewnego jego boku.

*Rozwiązanie*

Trójkąty  $ABD$  i  $CDA$  mają równe pola oraz wspólny bok  $AD$ . Wobec tego wysokości tych trójkątów poprowadzone do boku  $AD$  są równe. Ponadto punkty  $B$  i  $C$  leżą po tej samej stronie prostej  $AD$ . Stąd wniosek, że przekątna  $AD$  jest równoległa do boku  $BC$ .

Analogicznie dowodzimy, że pozostałe cztery przekątne pięciokąta  $ABCDE$  są równoległe do odpowiednich boków tego pięciokąta.

*Uwaga:* Istnieją pięciokąty  $ABCDE$  spełniające warunki zadania, które nie są foremne.

2. Dane są dodatnie liczby całkowite  $a$  i  $b$ . Wykaż, że jeżeli liczba  $a^2$  jest podzielna przez liczbę  $a+b$ , to także liczba  $b^2$  jest podzielna przez liczbę  $a+b$ .

*Rozwiązanie*

Ponieważ  $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ , więc  $b^2 = (b-a)(a+b) + a^2$ . Prawa strona ostatniej równości jest podzielna przez liczbę  $a+b$ , a zatem liczba  $b^2$  jest także podzielna przez liczbę  $a+b$ .

3. W turnieju tenisa stołowego wzięło udział  $n$  zawodników ( $n \geq 4$ ). Każdy zawodnik rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, żaden mecz nie zakończył się remisem. Po turnieju wszyscy zawodnicy usiedli przy okrągłym stole w taki sposób, że każdy zawodnik wygrał z osobą siedzącą obok niego z jego lewej strony. Wykaż, że istnieją tacy trzej zawodnicy  $A$ ,  $B$  i  $C$ , że  $A$  wygrał z  $B$ ,  $B$  wygrał z  $C$  oraz  $C$  wygrał z  $A$ .

*Rozwiązanie*

Nazwijmy danych zawodników  $A_1, A_2, \dots, A_n$  i przyjmijmy, że siedzą oni przy okrągłym stole w wymienionej kolejności, zgodnej z ruchem wskazówek zegara. Wtedy, na mocy warunków zadania,  $A_1$  wygrał z  $A_2$ ,  $A_2$  wygrał z  $A_3$ ,  $\dots$ ,  $A_{n-1}$  wygrał z  $A_n$  oraz  $A_n$  wygrał z  $A_1$ .

Jeśli ponadto zawodnik  $A_1$  wygrał z zawodnikiem  $A_{n-1}$ , to przyjmując  $A = A_1$ ,  $B = A_{n-1}$ ,  $C = A_n$ , otrzymujemy trójkę zawodników  $A$ ,  $B$ ,  $C$  spełniającą tezę zadania.

Założmy więc, że  $A_{n-1}$  wygrał z  $A_1$  i usuńmy zawodnika  $A_n$  od stołu. Wtedy pozostałych  $n-1$  zawodników  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  spełnia założenia treści zadania: każdy z nich wygrał z osobą, która siedzi obok niego, po jego lewej stronie. Kontynuując zatem powyższe rozumowanie i usuwając kolejnych zawodników, doprowadzimy do sytuacji, w której przy stole pozostaną tacy trzej zawodnicy  $A_1, A_2, A_3$ , że  $A_1$  wygrał z  $A_2$ ,  $A_2$  wygrał z  $A_3$  oraz  $A_3$  wygrał z  $A_1$ . Przyjmując wtedy  $A = A_1$ ,  $B = A_2$ ,  $C = A_3$ , dostajemy trójkę zawodników  $A$ ,  $B$ ,  $C$  spełniającą tezę zadania.



---

4. Udowodnij, że dla każdych liczb  $x, y$  należących do przedziału  $(0, 1)$  spełniona jest nierówność

$$x(1-y)^2 + y(1-x)^2 < (1-xy)^2.$$

*Rozwiązanie*

Daną w treści zadania nierówność przekształcamy równoważnie, uzyskując kolejno:

$$\begin{aligned}x(1-y)^2 + y(1-x)^2 &< (1-xy)^2 \\x(1-2y+y^2) + y(1-2x+x^2) &< 1-2xy+x^2y^2 \\x+xy^2+y+yx^2 &< 1+2xy+x^2y^2 \\(x+y) + xy(x+y) &< (1+xy)^2 \\(x+y)(1+xy) &< (1+xy)^2.\end{aligned}$$

Liczyby  $x, y$  są dodatnie, więc  $1+xy > 0$ . Dzieląc zatem obie strony otrzymanej nierówności przez  $1+xy$  i kontynuując przekształcenia równoważne, dostajemy

$$\begin{aligned}1+xy-x-y &> 0 \\(1-x)(1-y) &> 0.\end{aligned}$$

Uzyskana nierówność jest spełniona, gdyż obie liczby  $x, y$  są mniejsze od 1. Dowód jest więc zakończony.

---

5. Dany jest czworościan foremny opisany na sferze o promieniu 1. Udowodnij, że w tym czworościanie można umieścić 6 kul o promieniu  $\frac{1}{2}$ , w taki sposób, aby każde dwie kule miały co najwyżej jeden punkt wspólny.

*Rozwiązanie*

Oznaczmy przez  $A, B, C, D$  wierzchołki danego czworościanu foremnego. Poprowadźmy płaszczyznę styczną do sfery wpisanej w ten czworościan, równoległą do płaszczyzny  $ABC$  i różną od płaszczyzny  $ABC$ . Przyjmijmy, że przecina ona krawędzie  $AD, BD$  i  $CD$  odpowiednio w punktach  $K, L$  i  $M$ .

Środek sfery wpisanej w czworościan  $ABCD$  dzieli wysokość poprowadzoną z wierzchołka  $D$  w stosunku  $1:3$  licząc od podstawy  $ABC$ . Wynika stąd, że płaszczyzna  $KLM$  przechodzi przez środek tej wysokości. Ponieważ płaszczyzna  $KLM$  jest równoległa do płaszczyzny  $ABC$ , więc na mocy twierdzenia Talesa, punkty  $K, L$  i  $M$  są odpowiednio środkami krawędzi  $AD, BD$  i  $CD$ .

W analogiczny sposób określamy trzy płaszczyzny równoległe do pozostałych ścian. Jeśli więc przez  $N, P$  i  $Q$  oznaczmy odpowiednio środki krawędzi  $AB, BC$  i  $AC$ , to sfera wpisana w czworościan  $ABCD$  jest styczna także do płaszczyzn  $KNQ, LNP$  i  $MPQ$ .

Długości krawędzi każdego z czworościanów foremných  $AKNQ, BLNP, CMPQ$  i  $DKLM$  są równe i wynoszą  $\frac{1}{2}$  długości krawędzi czworościanu  $ABCD$ . Zatem kule wpisane w te czworościany mają promienie równe  $\frac{1}{2}$ . Ponadto w kuli wpisanej w czworościan  $ABCD$  możemy umieścić dwie kule o promieniu  $\frac{1}{2}$  mające dokładnie jeden punkt wspólny. W ten sposób w czworościan  $ABCD$  umieściliśmy 6 kul o promieniu  $\frac{1}{2}$ , z których każde dwie mają co najwyżej jeden punkt wspólny.