

# VI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego  
(19 marca 2011 r.)



1. Czy istnieją takie liczby całkowite  $a$  i  $b$ , że liczby

$$a^2 + b \quad \text{oraz} \quad a + b^2$$

są kolejnymi liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

2. Dany jest 99-kąt foremny. Wyznacz liczbę trójkątów równoramiennych, których wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami danego wielokąta.

3. Punkt  $I$  jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$ . Okrąg styczny do prostej  $AI$  w punkcie  $I$  i przechodzący przez punkt  $B$  przecina bok  $BC$  w punkcie  $P$  (różnym od  $B$ ). Proste  $IP$  i  $AC$  przecinają się w punkcie  $Q$ . Wykaż, że punkt  $I$  jest środkiem odcinka  $PQ$ .

4. Liczby  $p$  i  $q$  są różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnij, że liczba  $p^2 + q^2$  nie jest podzielna przez liczbę  $p + q$ .

5. Wewnątrz koła o promieniu 1 znajdują się punkty  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{100}$ . Udowodnij, że na brzegu tego koła istnieje taki punkt  $P$ , dla którego

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_{100} \geq 100.$$

