Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Treści zadań

Perzanowo 2011

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Zawody indywidualne

1. Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb rzeczywistych spełniające równanie
$$x^2+y^2+2x+xy+4=2y\,.$$

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach AB i AD, przy czym czworokąt $AKCL$ jest równoległobokiem. Odcinki KD i BL przecinają się w punkcie M. Wykaż, że pola czworokątów $AKML$ i $BCDM$ są równe.

3. Liczby k i m można przedstawić w postaci a^2+2b^2, gdzie a, b są liczbami całkowitymi. Udowodnij, że także liczbę km można przedstawić w tej postaci.

4. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\sphericalangle A=90^\circ$ oraz $AB=a$, $AC=b$. Różne punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB. Wykaż, że obwód trójkąta DEF jest większy od
$$\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

5. Liczba $a>1$ jest całkowita, przy czym nie jest ona ani liczbą pierwszą, ani potęgą liczby 2. Wykaż, że liczbę a można przedstawić w postaci sumy co najmniej trzech kolejnych liczb całkowitych dodatnich.

6. Wykaż, że dla każdych dodatnich liczb a, b spełniona jest nierówność
$$\frac{a}{a^4+b^2}+\frac{b}{b^4+a^2}\leqslant\frac{1}{ab}\,.$$

7. Prostokąt rozcięto na pewną liczbę części, z których każda jest kwadratem o wymiarach 2×2 lub prostokątem o wymiarach 1×4. Następnie jeden kwadrat 2×2 wymieniono na jeden prostokąt 1×4. Wykaż, że z otrzymanych części nie można ułożyć wyjściowego prostokąta.

8. W trapezie $ABCD$ punkt S leży na podstawie AB, a punkt R leży na podstawie CD. Odcinki DS i AR przecinają się w punkcie K, a odcinki CS i BR przecinają się w punkcie L. Wykaż, że suma pól trójkątów AKD i BCL jest równa polu czworokąta $KSLR$.

9. Dane są takie liczby całkowite a, b (różne od zera), że liczba ab jest dzielnikiem liczby a^2-b^2. Udowodnij, że $|a|=|b|$.

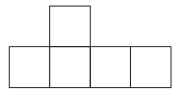
10. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 1. Wyznacz wszystkie takie pary punktów (P,Q), leżące wewnątrz tego kwadratu, dla których
$$AP+DP+PQ+BQ+CQ=1+\sqrt{3}\,.$$

11. Rozwiąż równanie $x^3-\sqrt{x^2-4}+8=0$.

12. Jeśli szerokość pewnego prostokąta powiększymy o 50%, to jego szerokość powiększy się o 25%. O ile procent zmniejszy się długość tego prostokąta, jeśli jego długość zmniejszymy o 50%?

13. Przekątne pewnego trapezu mają długości 15 oraz 20, a wysokość tego trapezu wynosi 12. Oblicz pole tego trapezu.

14. Czy kwadrat o wymiarach 100×100 można rozciąć na części przystające do tej na rysunku? (Każda część składa się z pięciu kwadratów jednostkowych.) Odpowiedź uzasadnij.



15. Dany jest taki ostrosłup czworokątny $SABCD$ o podstawie $ABCD$, w którym $AS=BS=DS$ oraz

$$2\sphericalangle ASB=\sphericalangle BSC\,,\quad 2\sphericalangle BSC=\sphericalangle CSD\,,\quad 2\sphericalangle CSD=\sphericalangle DSA\,.$$

Wiadomo też, że $\sphericalangle SAB=2\sphericalangle SAD$. Wyznacz miarę kąta SAB.

16. Wewnątrz koła o promieniu 1 wybrano sześć punktów. Wykaż, że pewne dwa z tych punktów są odległe o co najwyżej 1.

17. Czy liczbę 1 można przedstawić jako sumę odwrotności ośmiu różnych liczb naturalnych?

18. Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) nieujemnych liczb rzeczywistych, dla których spełnione są równości

$$\sqrt{a}+\sqrt{b+c}=\sqrt{b}+\sqrt{c+a}=\sqrt{c}+\sqrt{a+b}\,.$$

19. Okrąg ω jest wpisany w romb $ABCD$. Prosta k, styczna do okręgu ω, przecina odcinki BC i CD odpowiednio w punktach P i Q. Wykaż, że wartość iloczynu $BP\cdot DQ$ nie zależy od wyboru stycznej k.

20. W pewnym turnieju bierze udział n graczy. Każdy rozgrywa jeden mecz z każdym i nie ma remisów. Udowodnij, że po zakończeniu turnieju wszystkich zawodników można tak ustawić w kolejce, aby każdy z nich, z wyjątkiem pierwszego, stał bezpośrednio za zawodnikiem, z którym wygrał.

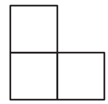
21. Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi długości 1. Oblicz odległość pomiędzy prostymi $A'B$ i $B'C$.

Mecz matematyczny

22. Wyznacz wszystkie pary (p,q) liczb pierwszych, dla których

$$p+q=(p-q)^3\,.$$

23. Dana jest szachownica 32×32. Po usunięciu pewnego pola okazało się, że pozostałą część tej szachownicy można pokryć klockami zbudowanymi z trzech kwadratów jednostkowych, jak na rysunku. Które pole usunięto?



24. Czy istnieje dziesięć takich liczb naturalnych, że żadna z tych liczb nie dzieli się przez żadną z pozostałych, a kwadrat każdej z tych liczb dzieli się przez każdą z pozostałych?

25. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB, przy czym $\sphericalangle FDE = \sphericalangle BAC$ oraz $\sphericalangle DEF = \sphericalangle ABC$. Wykaż, że punkt przecięcia wysokości trójkąta DEF pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

26. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC oraz jego wysokości AD i BE. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na prostą DE. Wykaż, że $PE = DQ$.

27. Rozstrzygnij, czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, dla której liczba $7^n - 1$ jest podzielna przez liczbę $6^n - 1$.

28. Na przyjęciu spotkało się n osób. Okazało się, że żadnych dwóch znajomych nie ma wspólnego znajomego. Ponadto każdych dwóch nieznajomych ma dokładnie dwóch wspólnych znajomych. Udowodnij, że wszystkie osoby obecne na tym przyjęciu mają taką samą liczbę znajomych.

29. Wykaż, że dla każdych dodatnich liczb a, b, c spełniona jest nierówność

$$\sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c} \leqslant \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}.$$

30. Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach CD, DA, AB, BC czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym żaden z tych punktów nie pokrywa się z wierzchołkiem czworokąta. Wykaż, że jeżeli $[AKB] = [CDM]$ oraz $[BCL] = [DAN]$, to $[ABK] = [BCL]$.
Uwaga: Symbol $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ.

31. Rozstrzygnij, czy istnieje taki ostrosłup czworokątny o krawędziach bocznych różnej długości, który można podzielić na trzy przystające czworościany.

32. Piotrek i Marcin zostali wyrzuceni z zajęć. Otrzymali długopis i kartkę z napisaną liczbą 2. Co minutę wykonują następującą operację: mnożą wszystkie liczby znajdujące się na kartce, dodają liczbę 1, a następnie wpisują na kartkę największy dzielnik pierwszy otrzymanej liczby. Mogą wrócić na zajęcia dopiero wtedy, gdy na kartce pojawi się liczba 5. Czy kiedykolwiek to nastąpi? Jeśli tak, to po ilu minutach?