XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów (2022/23)

Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia — część korespondencyjna

(1 września – 17 października 2022 r.)

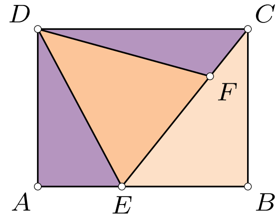
1. Dany jest prostokąt o obwodzie x cm, w którym stosunek długości boków wynosi $1:2$. Załóżmy, że pole tego prostokąta jest równe x cm^2. Wyznacz x.

2. Kamil napisał na tablicy działanie polegające na naprzemiennym odejmowaniu i dodawaniu liczb naturalnych od 1 do 100:

$$1-2+3-4+5-6+\ldots-98+99-100.$$

Następnie Kamil starł jeden ze znaków $+$ lub $-$ i wpisał w jego miejsce znak $=$, uzyskując w ten sposób prawdziwą równość. Którą liczbę poprzedzał starty znak? Podaj wszystkie możliwości. Odpowiedź uzasadnij.

3. Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkt E leży na boku AB, a punkt F leży na odcinku CE. Wykaż, że jeśli trójkąty ADE i CDF mają równe pola, to również trójkąty BCE i DEF mają równe pola.



Zadanie 3.

4. Każdą z liczb naturalnych od 1 do n pokolorowano albo na niebiesko, albo na czerwono, przy czym każdego z tych kolorów użyto co najmniej raz. Okazało się, że:

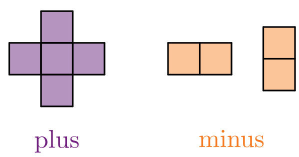
- każda liczba czerwona jest sumą pewnych dwóch różnych liczb niebieskich;
- każda liczba niebieska jest różnicą pewnych dwóch liczb czerwonych.

Wyznacz najmniejszą liczbę n, dla której takie kolorowanie jest możliwe.

5. Liczby dodatnie a, b, c spełniają nierówności

$$a+b \geqslant ab, \quad b+c \geqslant bc \quad \text{oraz} \quad c+a \geqslant ca.$$

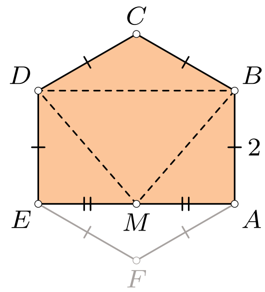
Udowodnij, że $a+b+c \geqslant \frac{3}{4}abc$.



Zadanie 6.

6. *Plusem* nazwiemy przedstawioną na rysunku figurę złożoną z pięciu kwadratów o boku 1, a *minusem* — każdy prostokąt złożony z dwóch takich kwadratów. Czy istnieje liczba nieparzysta n o tej własności, że kwadrat o boku n można rozciąć na plusy i minusy? Odpowiedź uzasadnij.

7. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$ o boku 2. Punkt M jest środkiem przekątnej AE. Pięciokąt $ABCDE$ zagięto wzdłuż odcinków BD, BM, DM w taki sposób, że punkty A, C oraz E spotkały się. W wyniku tej operacji otrzymano czworościan. Wyznacz jego objętość.



Zadanie 7.

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMJ lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMJ właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

17 października 2022 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMJ, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przesyłania prac, a także regulamin OMJ i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: `www.omj.edu.pl`.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki.

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki