XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody pierwszego stopnia (1 września – 17 października 2022 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Dany jest prostokąt o obwodzie x cm, w którym stosunek długości boków wynosi $1:2$. Załóżmy, że pole tego prostokąta jest równe x cm^2. Wyznacz x.

Rozwiązanie

Odpowiedź: $x=\mathbf{18}$

Sposób I

Przypuśćmy, że krótszy bok danego prostokąta ma długość a cm. Wówczas dłuższy bok tego prostokąta ma długość $2a$ cm. Obwód prostokąta jest więc równy $6a$ cm, a pole prostokąta jest równe $2a^2$ cm^2. Stąd uzyskujemy (pamiętając, że $a>0$)

$$6a=x=2a^2, \quad \text{czyli} \quad 3=a$$

i w konsekwencji $x=18$.

Sposób II

Przypuśćmy, że prostokąt ma wymiary (w centymetrach) $a\times b$, przy czym $\frac{b}{a}=2$. Pole tego prostokąta jest równe ab, a obwód tego prostokąta jest równy $2a+2b$, więc warunek z treści zadania można zapisać jako

$$ab=2a+2b.$$

Po obustronnym podzieleniu przez a uzyskujemy

$$b=2+2\cdot\frac{b}{a}, \quad \text{czyli} \quad b=2+2\cdot 2=6.$$

W konsekwencji $a=\frac{b}{2}=3$ i ostatecznie $x=ab=2a+2b=18$.

Uwaga 1.

Jedyny prostokąt spełniający warunki zadania ma długości boków wyrażające się liczbami całkowitymi. Sama treść zadania nie zawiera jednak założenia o tym, że boki prostokąta mają długości całkowite. Naśladując rozumowania przeprowadzone powyżej można wykazać, że dla dowolnej liczby dodatniej t istnieje prostokąt o wymiarach $a\times a\cdot t$, w którym pole oraz obwód wyrażają się tymi samymi liczbami. Przykładowo dla $t=4$, czyli stosunku długości boków $1:4$, uzyskujemy prostokąt $2,5\times 10$, którego zarówno pole, jak i obwód, są równe 25.

Uwaga 2.

Okazuje się, że istnieją jedynie dwa prostokąty o bokach całkowitej długości, w których pole oraz obwód wyrażają się tymi samymi liczbami — mają one wymiary 3×6 oraz 4×4. Aby się o tym przekonać, załóżmy, że w prostokącie o wymiarach $a\times b$, gdzie a, b są dodatnimi liczbami całkowitymi, pole oraz obwód są równe, tzn. $ab=2a+2b$. Tę równość można przekształcić równoważnie do postaci

$$(a-2)(b-2)=4.$$

Liczby $a-2$ oraz $b-2$ są całkowite oraz nie mniejsze od -1. Liczba 4 ma następujące przedstawienia w postaci iloczynu dwóch takich liczb: $4=1\cdot 4$ oraz $4=2\cdot 2$. Pierwsze z tych przedstawień odpowiada prostokątowi 3×6, a drugie — prostokątowi 4×4.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

2. Kamil napisał na tablicy działanie polegające na naprzemiennym odejmowaniu i dodawaniu liczb naturalnych od 1 do 100:

$$1-2+3-4+5-6+\ldots-98+99-100.$$

Następnie Kamil starł jeden ze znaków $+$ lub $-$ i wpisał w jego miejsce znak $=$, uzyskując w ten sposób prawdziwą równość. Którą liczbę poprzedzał starty znak? Podaj wszystkie możliwości. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Starty został znak $-$ poprzedzający **50** lub znak $+$ poprzedzający **51**.

Sposób I

Przypuśćmy, że Kamil starł znak $+$ następujący bezpośrednio po liczbie parzystej $2k$ dla pewnej liczby naturalnej k spełniającej nierówności $1 \leqslant k \leqslant 49$. Wówczas wynik działania uzyskanego po lewej stronie otrzymanej równości jest sumą k składników równych -1, czyli:

$$(1-2)+(3-4)+\ldots+((2k-1)-2k)=\underbrace{(-1)+(-1)+\ldots+(-1)}_{k}=-k.$$

Po prawej zaś stronie uzyskujemy sumę $50-k$ składników równych -1:

$$(2k+1-(2k+2))+(2k+3-(2k+4))+\ldots+(99-100)=\underbrace{(-1)+(-1)+\ldots+(-1)}_{50-k}=-(50-k).$$

Równość $k=50-k$ jest prawdziwa tylko dla $k=25$. To oznacza, że jeśli Kamil starł znak $+$, to mógł to być wyłącznie znak poprzedzający liczbę 51.

Przypuśćmy teraz, że Kamil starł znak $-$ poprzedzający liczbę parzystą $2k$ dla $1 \leqslant k \leqslant 49$. Uzyskana w ten sposób równość tym różni się od równości rozważonej w poprzednim przypadku (starcia znaku $+$ po liczbie $2k$), że po lewej stronie nie ma składnika $-2k$, a po prawej stronie ma dodatkowy składnik $2k$. W związku z tym wynik działania po każdej stronie jest o dokładnie $2k$ większy niż w poprzednim przypadku. To oznacza, że wyniki działań po obu stronach są ponownie równe wyłącznie dla $k=25$.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy Kamil starł znak $-$ poprzedzający liczbę 100. Bezpośrednio sprawdzamy, że wówczas wynik działania po lewej stronie jest równy 50, czyli jest różny od 100. To oznacza, że jeśli Kamil starł znak $-$, to znak ten poprzedzał liczbę 50.

Sposób II

W poniższej tabeli zebrane są wyniki działań otrzymanych po lewej oraz po prawej stronie dla każdego z możliwych położeń znaku równości. Uzasadnimy ich poprawność.

„=” przed:	2	3	4	5	…	$2k$	$2k+1$	…	98	99	100
lewa:	1	-1	2	-2		k	$-k$		49	-49	50
prawa:	-47	-49	-44	-48		$3k-50$	$k-50$		97	-1	100

Drugi wiersz (czyli wyniki działania po lewej stronie) wypełniamy od lewej do prawej kolejno liczbami:

$$1,\quad 1-2,\quad 1-2+3,\quad 1-2+3-4,\quad \ldots.$$

Jeśli starty został znak $-$ poprzedzający liczbę parzystą $2k$, to po lewej stronie uzyskujemy

$$1+(-2+3)+(-4+5)+\ldots+(-(2k-2)+(2k-1))=\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{k}=k.$$

Jeśli natomiast starty został znak $+$ poprzedzający liczbę nieparzystą $2k+1$, to po lewej stronie uzyskujemy wynik o $2k$ mniejszy od powyższego — czyli $-k$.

Trzeci wiersz wypełniamy osobno w dwóch przypadkach. Jeśli starty został znak $+$ (poprzedzający $2k+1$), to suma wyników uzyskanych po lewej i po prawej stronie jest równa wynikowi wyjściowego działania, czyli

$$1-2+3-4+\ldots+99-100=-50.$$

Wobec tego jeśli wynik po lewej stronie jest równy $-k$, to wynik po prawej stronie jest równy $-50-(-k)=k-50$.

Jeśli starty został znak $-$ poprzedzający liczbę parzystą $2k$, to suma wyników uzyskanych po lewej i po prawej stronie jest równa

$$\underbrace{1-2+3-4+\ldots+(2k-1)}_{\text{lewa}}+\underbrace{2k+(2k+1)-(2k+2)+\ldots+99-100)}_{\text{prawa}},$$

czyli różni się od wyjściowego działania wyłącznie tym, że zamiast $-2k$ pojawia się składnik $2k$. To oznacza, że suma wyników po lewej i po prawej stronie jest równa $-50+4k$. Zatem skoro po lewej stronie od znaku równości wynik działania jest równy k, to po prawej stronie wynik jest równy $(-50+4k)-k=3k-50$.

Z powyższych rozważań wynika, że jeśli starty został znak $+$ poprzedzający liczbę $2k+1$, to wyniki po lewej i po prawej stronie są równe dokładnie wtedy, gdy $-k=k-50$, czyli $k=25$. To oznacza, że starty znak poprzedzał liczbę 51. Jeśli zaś starty został znak $-$ poprzedzający liczbę $2k$, to wyniki są równe dokładnie wtedy, gdy $k=3k-50$, czyli również gdy $k=25$. To oznacza, że starty znak poprzedzał liczbę 50.

Uwaga

Rozumowania przeprowadzone powyżej pozwalają rozwiązać zadanie także w ogólnym przypadku, gdy liczbę 100 zastąpimy liczbą postaci $4n$ dla liczby całkowitej $n\geqslant 1$. Wówczas startym znakiem może być dowolny z dwóch znaków sąsiadujących z liczbą $2n$. Już dla $n=1$ można przekonać się o tym, że prawdziwą równość można uzyskać na więcej niż jeden sposób:

$$1-2=3-4 \quad \text{oraz} \quad 1=2+3-4.$$

Z kolei jeśli zastąpimy liczbę 100 liczbą m niepodzielną przez 4, to uzyskanie prawdziwej równości w sposób opisany w treści zadania nie będzie możliwe. Uzasadnimy ten fakt.

Zauważmy, że wystarczy udowodnić, że nie jest możliwe odpowiednie starcie znaku $+$. Rzeczywiście, rozumowanie przeprowadzone w pierwszym sposobie rozwiązania pozwala wnioskować, że jeśli starcie znaku $-$ przed liczbą $2k$ prowadzi do prawdziwej równości, to starcie znaku $+$ po liczbie $2k$ również (dla $m=2k$ uznajemy, że prawa strona jest równa 0).

Jeśli liczba m jest nieparzysta, to po starciu znaku $+$ po lewej stronie uzyskujemy liczbę ujemną, a po prawej — liczbę dodatnią. Liczby te nie mogą więc być równe. Przyjmijmy, że liczba m jest dwukrotnością liczby nieparzystej, powiedzmy $m=2\ell$. Wówczas po starciu znaku $+$ następującego po liczbie $2k$ uzyskujemy po lewej stronie wynik $-k$, a po prawej stronie — wynik $-(\ell-k)$. Jednak $-k=-(\ell-k)$ oznacza, że $\ell=2k$, co nie jest możliwe, gdyż ℓ jest liczbą nieparzystą.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

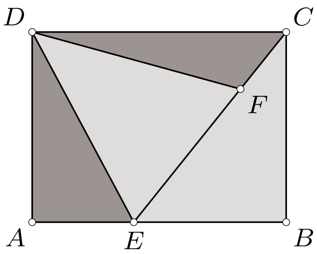
3. Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkt E leży na boku AB, a punkt F leży na odcinku CE. Wykaż, że jeśli trójkąty ADE i CDF mają równe pola, to również trójkąty BCE i DEF mają równe pola.

Rozwiązanie

We wszystkich rozwiązaniach przez $[\mathcal{F}]$ będziemy oznaczali pole figury $\mathcal{F}$.

Sposób I

Zauważmy, że $[CDE] = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD = \frac{1}{2}[ABCD]$, więc także $[ADE]+[BCE] = \frac{1}{2}[ABCD]$.



rys. 1

Stąd wniosek, że jeśli $[ADE] = [CDF]$ (rys. 1), to

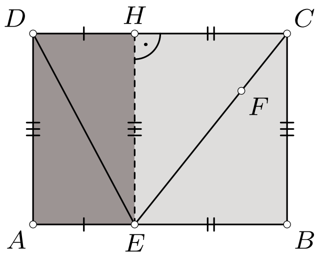
$$[BCE] = \tfrac{1}{2}[ABCD] - [ADE] = \tfrac{1}{2}[ABCD] - [CDF] = [DEF].$$

Sposób II

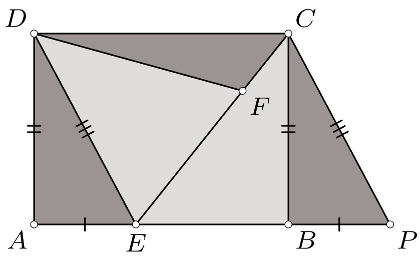
Niech H będzie rzutem prostokątnym punktu E na odcinek CD (rys. 2). Wówczas ADE i HED oraz BCE i HEC to pary trójkątów przystających. Wobec tego

$$[ADE]+[BCE] = [HED]+[HEC] = [CDE] = [CDF]+[DEF].$$

Stąd bezpośrednio uzyskujemy, że jeśli $[ADE] = [CDF]$, to $[BCE] = [DEF]$.



rys. 2



rys. 3

Sposób III

Niech P będzie takim punktem, że czworokąt $PCDE$ jest równoległobokiem (rys. 3). Wówczas trójkąty ADE oraz BCP są przystające (cecha bok–bok–bok), gdyż

$$AD = BC, \quad DE = CP \quad \text{oraz} \quad AE = AB - BE = CD - BE = PE - BE = BP.$$

Ponadto trójkąty CDE oraz EPC są przystające, jako połówki równoległoboku. Wobec tego jeżeli $[ADE] = [CDF]$, to

$$[BCE] = [EPC] - [BCP] = [CDE] - [ADE] = [CDE] - [CDF] = [DEF].$$

Uwaga

Teza zadania pozostanie prawdziwa gdy zastąpimy założenie, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem słabszym założeniem — że czworokąt ten jest równoległobokiem.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

4. Każdą z liczb naturalnych od 1 do n pokolorowano albo na niebiesko, albo na czerwono, przy czym każdego z tych kolorów użyto co najmniej raz. Okazało się, że:

- każda liczba czerwona jest sumą pewnych dwóch różnych liczb niebieskich;
- każda liczba niebieska jest różnicą pewnych dwóch liczb czerwonych.

Wyznacz najmniejszą liczbę n, dla której takie kolorowanie jest możliwe.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Najmniejszą liczbą, dla której istnieje żądane kolorowanie jest $n=\mathbf{9}$.

Przypuśćmy, że n jest liczbą, dla której kolorowanie zgodne z warunkami zadania jest możliwe. Wówczas $n\geqslant 2$, gdyż każdy z kolorów został użyty co najmniej raz.

Zauważmy, że liczba n nie może być niebieska, gdyż nie można jej przedstawić jako różnicy dwóch spośród liczb od 1 do n. Wobec tego liczba n jest czerwona. Z kolei liczby 1 oraz 2 nie mogą być czerwone, gdyż żadna z nich nie jest sumą dwóch różnych liczb od 1 do n. To oznacza, że liczby 1 oraz 2 są niebieskie. W szczególności oznacza to, że $n\geqslant 3$.

Zauważmy, że $n-1$ nie jest różnicą dwóch liczb czerwonych (gdyż 1 jest liczbą niebieską). Wobec tego liczba $n-1$ nie jest niebieska, czyli jest czerwona. Podobnie $n-2=(n-1)-1$ nie jest różnicą dwóch liczb czerwonych (gdyż zarówno 1, jak i 2 są niebieskie), co oznacza, że liczba $n-2$ jest czerwona. Tym samym $n\neq 3$ oraz $n\neq 4$, czyli $n\geqslant 5$.

Skoro n jest liczbą czerwoną, to n jest sumą dwóch różnych niebieskich liczb. Ponieważ $n-1$ oraz $n-2$ to liczby czerwone, więc suma dwóch różnych niebieskich liczb jest z pewnością nie większa od $(n-3)+(n-4)=2n-7$. Wobec tego $n\leqslant 2n-7$, czyli $n\geqslant 7$.

Gdyby $n=7$, to jedyną możliwością jest, że czerwona liczba 7 jest sumą niebieskich liczb 3 i 4. Wtedy jednak niebieska liczba 4 nie jest różnicą dwóch czerwonych liczb — sprzeczność.

Podobnie gdyby $n=8$, to jedyną możliwością jest, że liczby 3 oraz 5 są niebieskie, ale wówczas 5 nie jest różnicą dwóch czerwonych liczb. Tym samym wykluczyliśmy wszystkie przypadki w których $n\leqslant 8$.

Udowodnimy, że dla $n=9$ kolorowanie liczb 1, 2, 4, 5, 6 na niebiesko, a liczb 3, 7, 8, 9 na czerwono spełnia warunki zadania. Rzeczywiście, wynika to bezpośrednio z następujących rachunków:

$$1=9-8,\ 2=9-7,\ 4=7-3,\ 5=8-3,\ 6=9-3,\qquad 3=1+2,\ 7=1+6,\ 8=2+6,\ 9=4+5.$$

Uwaga

Opisaną w treści zadania własność mają wszystkie liczby naturalne $n\geqslant 9$. Przedstawimy przykłady kolorowań, które o tym świadczą. Weryfikację poprawności kolorowań pomijamy.

- Jeżeli $n=3k$ dla $k\geqslant 3$, to kolorujemy

$$\begin{array}{llll} \text{na niebiesko:} & 1,2,\ldots,k-1, & & k+1,k+2,\ldots,2k, & \\ \text{na czerwono:} & & k, & & 2k+1,2k+2,\ldots,3k. \end{array}$$

- Jeżeli $n=3k+1$ dla $k\geqslant 3$, to kolorujemy

$$\begin{array}{llllll} \text{na niebiesko:} & 1,2,\ldots,k-1, & & k+1, & & k+3,\ldots,2k+1, & \\ \text{na czerwono:} & & k, & & k+2, & & 2k+2,\ldots,3k+1. \end{array}$$

- Jeżeli $n=3k+2$ dla $k\geqslant 3$, to kolorujemy

$$\begin{array}{llllll} \text{na niebiesko:} & 1,2,\ldots,k-1, & & k+1, & & k+4,\ldots,2k+2, & \\ \text{na czerwono:} & & k, & & k+2,k+3, & & 2k+3,\ldots,3k+2. \end{array}$$

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

5. Liczby dodatnie a, b, c spełniają nierówności

$$a+b \geqslant ab, \quad b+c \geqslant bc \quad \text{oraz} \quad c+a \geqslant ca.$$

Udowodnij, że $a+b+c \geqslant \frac{3}{4}abc$.

Rozwiązanie

Sposób I
Zauważmy, że dane nierówności pozwalają oszacować iloczyn abc na trzy sposoby:

$$\begin{aligned}
abc &\leqslant a(b+c) = ab+ca \leqslant (a+b)+(c+a) = 2a+b+c,\\
abc &\leqslant b(c+a) = bc+ab \leqslant (b+c)+(a+b) = a+2b+c,\\
abc &\leqslant c(a+b) = ca+bc \leqslant (c+a)+(b+c) = a+b+2c.
\end{aligned}$$

Dodając stronami trzy powyższe nierówności, uzyskujemy

$$3abc \leqslant (2a+b+c)+(a+2b+c)+(a+b+2c) = 4(a+b+c),$$

czyli po podzieleniu obu stron przez 4 — dowodzoną nierówność.

Sposób II
Dodając stronami wszystkie trzy dane nierówności, uzyskujemy

$$2(a+b+c) = (a+b)+(b+c)+(c+a) \geqslant ab+bc+ca, \quad \text{czyli} \quad a+b+c \geqslant \frac{1}{2}(ab+bc+ca).$$

Z kolei dodając stronami nierówności

$$(a+b)\cdot c \geqslant ab\cdot c, \quad (b+c)\cdot a \geqslant bc\cdot a, \quad (c+a)\cdot b \geqslant ca\cdot b,$$

otrzymujemy

$$2(ab+bc+ca) = (ca+bc)+(ab+ca)+(bc+ab) \geqslant 3abc, \quad \text{czyli} \quad ab+bc+ca \geqslant \frac{3}{2}abc.$$

Ostatecznie więc

$$a+b+c \geqslant \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}abc = \frac{3}{4}abc,$$

co było do udowodnienia.

Sposób III
Przypuśćmy, że $c \geqslant b \geqslant a$. Wówczas

$$\begin{aligned}
2(a+b+c) &= (a+b)+(a+c)+(b+c) \geqslant ab+ac+bc =\\
&= ab+\tfrac{1}{2}bc+ac+\tfrac{1}{2}bc \geqslant ab+\tfrac{1}{2}ab+ac+\tfrac{1}{2}ac = \tfrac{3}{2}a(b+c) \geqslant \tfrac{3}{2}abc,
\end{aligned}$$

skąd po podzieleniu obu stron przez 2 uzyskujemy tezę zadania.

Rozumowanie w przypadku dowolnego innego uporządkowania liczb a, b, c jest w pełni analogiczne, gdyż zmienne a, b, c odgrywają symetryczne role w założeniach oraz tezie zadania.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Sposób IV

Zauważmy, że założenie $a+b \geqslant ab$ można zapisać równoważnie jako

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant 1.$$

Gdyby $a>2$ oraz $b>2$, to

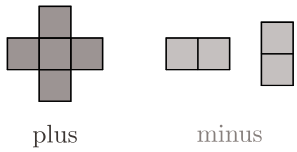
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

To oznacza, że co najmniej jedna z liczb a, b jest nie większa od 2. Przyjmijmy bez straty ogólności, że $a \leqslant 2$. Wówczas

$$2(a+b+c) \geqslant ab+bc+ca=a(b+c)+bc \geqslant abc+\tfrac{1}{2}\cdot 2bc \geqslant abc+\tfrac{1}{2}\cdot abc=\tfrac{3}{2}abc.$$

---

6. *Plusem* nazwiemy przedstawioną na rysunku figurę złożoną z pięciu kwadratów o boku 1, a *minusem* — każdy prostokąt złożony z dwóch takich kwadratów. Czy istnieje liczba nieparzysta n o tej własności, że kwadrat o boku n można rozciąć na plusy i minusy? Odpowiedź uzasadnij.



Rozwiązanie

Odpowiedź: Nie istnieje liczba nieparzysta n o opisanej własności.

Przypuśćmy, że taka liczba nieparzysta n istnieje. Rozważmy kwadrat $n \times n$ i przed rozcięciem pokolorujmy go w czarno-białą szachownicę złożoną z n^2 pól w taki sposób, aby cztery narożne pola były czarne.

Sposób I

Wartością figury złożonej z całych pól i pomalowanej w szachownicę nazwiemy różnicę między liczbą czarnych i białych pól tej figury. Zauważmy, że wartość całego kwadratu przed rozcięciem jest równa 1, gdyż łączna liczba wszystkich czarnych pól jest o 1 większa niż łączna liczba wszystkich białych pól.

Po rozcięciu kwadratu na plusy i minusy, każda z uzyskanych części będzie składała się z całych pól szachownicy. Każdy minus będzie miał jedno pole białe i jedno czarne, czyli będzie miał wartość 0. Z kolei każdy plus będzie miał albo cztery pola czarne i jedno pole białe, albo cztery pola białe i jedno pole czarne, czyli wartość 3 albo -3.

Jak widać, niezależnie od kształtu, wartość każdej z otrzymanych części jest liczbą podzielną przez 3. Oznacza to, że suma wartości wszystkich części również jest podzielna przez 3. Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż suma wartości wszystkich części jest równa wartości całego kwadratu, czyli 1, a 1 nie jest liczbą podzielną przez 3.

Sposób II

Oznaczmy przez m liczbę minusów (złożonych z jednego pola białego i jednego czarnego), przez b — liczbę plusów złożonych z czterech pól białych i jednego czarnego, a przez c — liczbę plusów złożonych z czterech pól czarnych i jednego białego.

Wówczas liczba wszystkich czarnych pól jest równa $m+b+4c$, a liczba wszystkich białych pól jest równa $m+4b+c$. Wiemy jednak, że pól czarnych jest łącznie o 1 więcej, czyli

$$1=(m+b+4c)-(m+4b+c)=3(c-b), \quad \text{skąd} \quad c-b=\tfrac{1}{3}.$$

Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż różnica dwóch liczb całkowitych nie może być równa $\frac{1}{3}$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

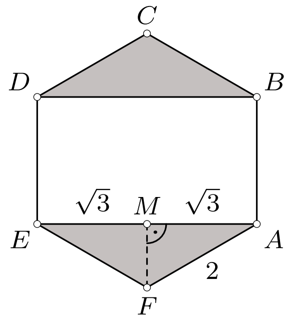
7. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$ o boku 2. Punkt M jest środkiem przekątnej AE. Pięciokąt $ABCDE$ zagięto wzdłuż odcinków BD, BM, DM w taki sposób, że punkty A, C oraz E spotkały się. W wyniku tej operacji otrzymano czworościan. Wyznacz jego objętość.

Rozwiązanie

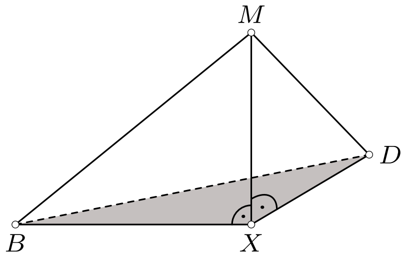
Odpowiedź: Objętość otrzymanego czworościanu jest równa **1**.

Sposób I

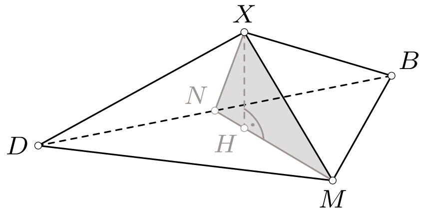
Zauważmy, że trójkąt AMF jest połówką trójkąta równobocznego o boku 2, wobec czego $AM=\sqrt{3}$ (rys. 4). Trójkąt AEF składa się z dwóch połówek trójkąta równobocznego o boku 2, więc jego pole jest równe $\sqrt{3}$. Tę samą wartość ma pole trójkąta BCD, gdyż trójkąty BCD oraz AEF są przystające.



rys. 4



rys. 5



rys. 6

Niech X będzie wierzchołkiem czworościanu, w którym po zagięciu pięciokąta spotkały się punkty A, C oraz E. Potraktujmy czworościan jako ostrosłup o podstawie BDX (rys. 5). Wówczas

$$\sphericalangle MXB = \sphericalangle MAB = 90^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle MXD = \sphericalangle MED = 90^\circ,$$

więc odcinek MX jest prostopadły do prostych BX oraz DX. W konsekwencji odcinek MX jest prostopadły do płaszczyzny BDX, a zatem jest wysokością rozważanego ostrosłupa.

Pole podstawy BXD jest równe polu trójkąta BCD, czyli $\sqrt{3}$, a wysokość MX ma taką długość jak odcinek AM, czyli $\sqrt{3}$. Stąd wniosek, że objętość danego czworościanu to

$$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=1.$$

Sposób II

Oznaczmy przez N środek odcinka BD, przez X — wierzchołek czworościanu, w którym po zagięciu pięciokąta spotkały się punkty A, C, E, a przez H — spodek wysokości czworościanu poprowadzonej z wierzchołka X (rys. 6). Trójkąt MNX ma boki długości $MN=AB=2$, $XN=CN=1$ oraz $XM=AM=\sqrt{3}$, skąd wniosek, że jest połówką trójkąta równobocznego i $\sphericalangle XMN=\sphericalangle XMH=30^\circ$. To oznacza, że również trójkąt prostokątny HMX jest połówką trójkąta równobocznego, a zatem $XH=\frac{1}{2}XM=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ostatecznie uzyskujemy, że szukana objętość to

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot BD\cdot NM\right)\cdot XH=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1.$$

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki