XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (14 stycznia 2023 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Na bokach AB i BC trójkąta ABC leżą odpowiednio takie punkty D i E, że

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BCD = \sphericalangle AED.$$

Wykaż, że $AE = BE$.

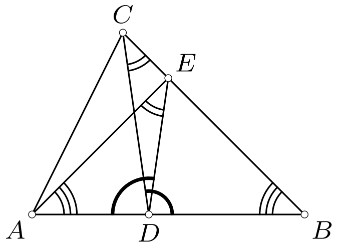
Rozwiązanie

Sposób I

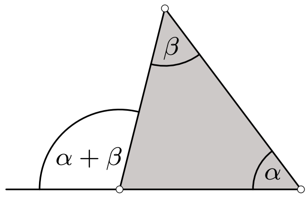
Zauważmy, że aby rozwiązać zadanie wystarczy udowodnić, że $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BAE$. Równość $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDE$ oznacza także równość kątów przyległych $\sphericalangle BDC = \sphericalangle ADE$ (rys. 1). W połączeniu z założeniem $\sphericalangle BCD = \sphericalangle AED$ uzyskujemy

$$\begin{aligned}\sphericalangle ABE = \sphericalangle DBC = 180^\circ - \sphericalangle BDC - \sphericalangle BCD = \\ = 180^\circ - \sphericalangle ADE - \sphericalangle AED = \sphericalangle DAE = \sphericalangle BAE,\end{aligned}$$

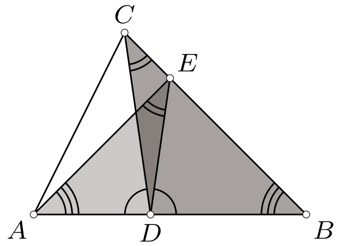
co było do udowodnienia.



rys. 1



rys. 2



rys. 3

Sposób II

Wykorzystamy *twierdzenie o kącie zewnętrznym* w trójkącie (rys. 2):

> *Miara kąta zewnętrznego trójkąta jest równa sumie miar kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych.*

Jest to bezpośredni wniosek z faktu, że suma miar kątów wewnętrznych trójkąta to 180°.

Dana równość $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDE$ kątów zewnętrznych odpowiednio w trójkątach BCD oraz ADE (rys. 3) oznacza, że

$$\sphericalangle DBC + \sphericalangle BCD = \sphericalangle DAE + \sphericalangle AED.$$

Wykorzystując równość $\sphericalangle BCD = \sphericalangle AED$, otrzymujemy więc $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DAE$. To oznacza, że trójkąt ABE jest równoramienny i $AE = BE$.

Uwaga 1.

Twierdzenie o kącie zewnętrznym jest wygodnym narzędziem między innymi w rozważaniu konfiguracji geometrycznych zawierających łamane zamknięte o przecinających się odcinkach. W powyższym zadaniu łamaną taką jest $ABCDEA$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Sposób III

Oznaczmy przez F punkt przecięcia odcinków AE i CD (rys. 4). Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\sphericalangle AFD = \sphericalangle CFE = 180^\circ - \sphericalangle FCE - \sphericalangle FEC = \\ = 180^\circ - \sphericalangle FED - \sphericalangle FEC = \sphericalangle BED.\end{aligned}$$

Wykorzystując powyższą równość oraz założenie $\sphericalangle ADF = \sphericalangle BDE$, uzyskujemy

$$\sphericalangle DAF = 180^\circ - \sphericalangle ADF - \sphericalangle AFD = 180^\circ - \sphericalangle BDE - \sphericalangle BED = \sphericalangle DBE.$$

W konsekwencji trójkąt ABE jest równoramienny i $AE = BE$.

Sposób IV

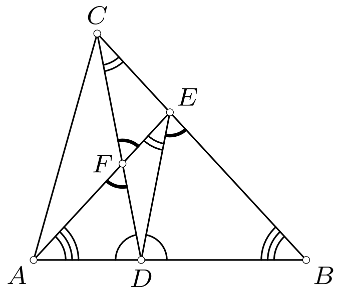
Oznaczmy przez G taki punkt odcinka AB, że odcinki CD i EG są równoległe (rys. 5). Wówczas

$$\sphericalangle GDE = \sphericalangle BDE = \sphericalangle ADC = \sphericalangle AGE = \sphericalangle DGE.$$

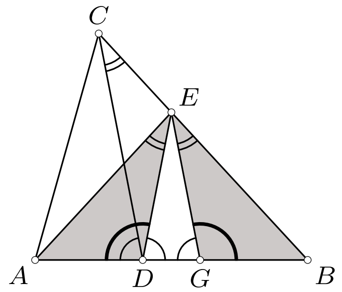
W konsekwencji $ED = EG$ oraz $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BGE$. Ponadto

$$\sphericalangle BEG = \sphericalangle BCD = \sphericalangle AED,$$

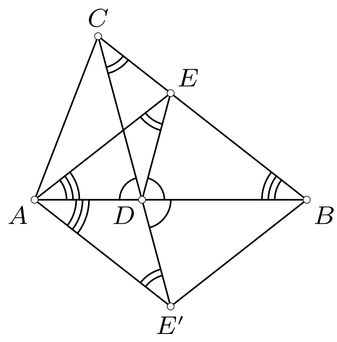
co oznacza, że trójkąty ADE oraz BGE są przystające (cecha kąt–bok–kąt). W rezultacie $AE = BE$.



rys. 4



rys. 5



rys. 6

Sposób V

Oznaczmy przez E' punkt symetryczny do punktu E względem prostej AB (rys. 6). Ponieważ $\sphericalangle BDE' = \sphericalangle BDE = \sphericalangle ADC$, więc punkty C, D, E' leżą na jednej prostej. Wobec tego mamy

$$\sphericalangle AE'C = \sphericalangle AE'D = \sphericalangle AED = \sphericalangle BCD = \sphericalangle BCE',$$

co oznacza, że proste AE' oraz BC są równoległe. W konsekwencji

$$\sphericalangle ABE = \sphericalangle BAE' = \sphericalangle BAE,$$

czyli $AE = BE$.

Uwaga 2.

Pod koniec ostatniego sposobu rozwiązania z założeń, że czworokąt $AEBE'$ jest deltoidem (przekątna AB jest jego osią symetrii) oraz trapezem (boki AE' oraz BE są równoległe) wywnioskowaliśmy, że ten czworokąt jest rombem ($AE = BE = AE' = BE'$). Przy okazji wykazaliśmy więc następującą regułę:

Jeżeli czworokąt jest jednocześnie deltoidem i trapezem, to jest rombem.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

2. Początkowo na tablicy napisane są liczby 2 oraz 5. *Ruch* polega na zastąpieniu jednej z dwóch liczb napisanych na tablicy ich sumą. Czy po wykonaniu pewnej liczby ruchów można uzyskać sytuację, w której na tablicy napisane są dwie kolejne liczby naturalne? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Nie jest możliwe uzyskanie opisanej sytuacji.

Przypuśćmy, że po pewnym ruchu na tablicy znalazły się liczby n oraz $n+1$. To oznacza, że przed wykonaniem tego ruchu na tablicy znajdowały się liczby n oraz 1, a w omawianym ruchu liczbę 1 zastąpiono ich sumą $n+1$.

Jednak liczba 1 nigdy nie może pojawić się na tablicy, gdyż po każdym ruchu jedną z liczb napisanych na tablicy zastępuje liczba od niej większa, a druga napisana liczba się nie zmienia.

Uwaga

Różnica między liczbami obecnymi na tablicy *może zmaleć* (o dowolnie dużą liczbę) wskutek wykonania pojedynczego ruchu. Przykładowo jeśli w pierwszym ruchu zastąpimy liczbę 2 liczbą $2+5=7$, to na tablicy pojawi się para liczb o różnicy równej $7-5=2$ (czyli mniejszej od początkowej różnicy $5-2=3$).

Można zadać pytanie, jakie różnice między dwiema liczbami napisanymi na tablicy są niemożliwe do uzyskania (rozwiązanie pokazuje, że jedną z takich różnic jest 1). Nietrudno udowodnić, na przykład rozważając wszystkie możliwości wykonania sześciu początkowych ruchów, że żadna z liczb

$$1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 14,\ 18$$

nigdy nie pojawi się na tablicy, więc też nie może być taką różnicą. Z drugiej strony, można wykazać, że każda dodatnia liczba całkowita różna od wypisanych powyżej może być uzyskana jako różnica napisanych na tablicy liczb (uwzględniając także początkową różnicę równą 3). W szczególności okazuje się, że największą z nieosiągalnych różnic jest 18.

---

3. Liczba naturalna n jest co najmniej dwucyfrowa. Jeżeli pomiędzy cyfrę dziesiątek a cyfrę jedności tej liczby wpiszemy pewną cyfrę, to uzyskamy sześciokrotność liczby n. Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia wyłącznie liczba $n=\mathbf{18}=\frac{1}{6}\cdot\mathbf{108}$.

Sposób I

Przypuśćmy, że liczba n jest postaci $10a+b$, gdzie b jest cyfrą jedności liczby n. Wówczas a to liczba uzyskana z n przez skreślenie cyfry jedności. Mamy $a\geqslant 1$, gdyż liczba n jest co najmniej dwucyfrowa.

Liczba uzyskana w wyniku wstawienia cyfry c pomiędzy cyfrę dziesiątek a cyfrę jedności liczby n jest równa $100a+10c+b$. Warunek z treści zadania przybiera zatem postać

$$100a+10c+b=6\cdot(10a+b),$$

skąd $40a+10c=5b$, czyli $8a+2c=b$.

Gdyby $a\geqslant 2$, to liczba $8a+2c$ byłaby co najmniej dwucyfrowa, a więc większa od b. Wobec tego $a=1$. Podobnie gdyby $c\geqslant 1$, to liczba $8+2c$ byłaby co najmniej dwucyfrowa, a więc różna od b. Zatem $c=0$ i w konsekwencji $b=8$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Sposób II

Zauważmy, że jeśli pierwszą (od lewej) cyfrą liczby n jest 1, to

$$100\ldots0 \leqslant n < 200\ldots0, \quad \text{czyli} \quad 600\ldots0 \leqslant 6n < 1200\ldots0, \qquad (*)$$

więc w tym przypadku pierwszą cyfrą liczby $6n$ jest 6, 7, 8, 9 lub 1. Wykonując analogiczne obserwacje dla innych możliwych pierwszych cyfr liczby n możemy wypełnić poniższą tabelę.

pierwsza (od lewej) cyfra n:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
możliwe pierwsze cyfry $6n$:	6,7,8,9,1	1	1,2	2	3	3,4	4	4,5	5

Jak widać, jeśli n oraz $6n$ mają tę samą pierwszą cyfrę, to jest nią 1. W tym wypadku druga cyfra liczby $6n$ jest równa 0 lub 1, jak widać z nierówności $(*)$.

Gdyby druga cyfra liczby n była równa 0 lub 1, to pierwsza cyfra liczby $6n$ byłaby równa 6 lub 7, czyli nie mogłaby być równa 1. To oznacza, że drugie cyfry liczb n oraz $6n$ są różne. To zaś może mieć miejsce tylko wtedy, gdy liczba n jest dwucyfrowa — jeśli n jest co najmniej trzycyfrowa, to w myśl warunków zadania liczby n oraz $6n$ mają tę samą drugą cyfrę.

Pozostaje sprawdzić, które liczby dwucyfrowe rozpoczynające się cyfrą 1 mają własność z treści zadania. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że jedyną taką liczbą jest $n = 18$.

---

4. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $AB > AD$. Punkty X oraz Y, różne od B, leżą na półprostej $BD^{\rightarrow}$, przy czym

$$CX = CB \quad \text{oraz} \quad AY = AB.$$

Udowodnij, że $DX = DY$.

Uwaga: Zapis $BD^{\rightarrow}$ oznacza półprostą o początku w punkcie B przechodzącą przez punkt D.

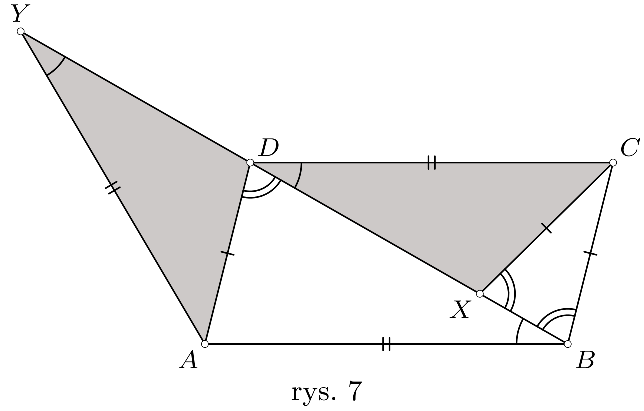
Rozwiązanie

Sposób I

Udowodnimy, że trójkąty DAY oraz XCD są przystające, skąd bezpośrednio wyniknie postulowana równość. Z określenia punktów X oraz Y (rys. 7) wynika, że

$$CX = CB = DA \quad \text{oraz} \quad AY = AB = DC.$$

Aby skorzystać z cechy przystawania trójkątów bok–kąt–bok pozostaje zatem wykazać, że $\sphericalangle DAY = \sphericalangle XCD$.



rys. 7

Zachodzą równości

$$\sphericalangle AYD = \sphericalangle ABD = \sphericalangle CDX \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD = \sphericalangle CXB,$$

skąd wniosek, że

$$\sphericalangle DAY = 180^\circ - \sphericalangle ADY - \sphericalangle AYD = \sphericalangle ADB - \sphericalangle AYD = \\ = \sphericalangle CXB - \sphericalangle CDX = 180^\circ - \sphericalangle CXD - \sphericalangle CDX = \sphericalangle XCD.$$

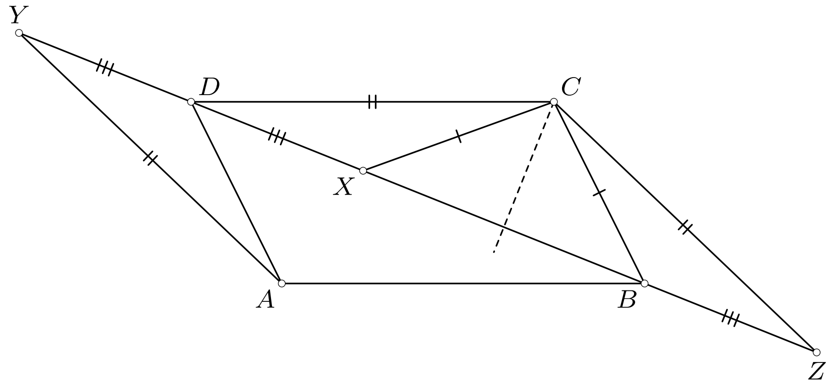
Powyższa równość kątów w połączeniu z równościami $CX = DA$ oraz $AY = DC$ oznacza, że trójkąty DAY oraz XCD są przystające (cecha bok–kąt–bok) i w konsekwencji $DX = DY$.

Sposób II

Niech Z będzie takim punktem różnym od D leżącym na półprostej $DB^{\rightarrow}$, że $CZ = CD$ (rys. 8). Wówczas (z uwagi na symetrię definicji) punkty Y i Z są symetryczne względem środka symetrii danego równoległoboku, skąd $DY = BZ$.

Trójkąty równoramienne BXC oraz ZDC mają wspólną oś symetrii (przechodzącą przez wierzchołek C). Stąd $BZ = DX$, gdyż odcinki te są symetryczne względem wspomnianej osi.

Ostatecznie $DY = BZ = DX$, co było do udowodnienia.



rys. 8

---

5. W każde pole tabeli 4×4 wpisano jedną z liczb 1 lub 2. Dla każdego wiersza obliczono sumę wpisanych w niego liczb, a dla każdej kolumny obliczono iloczyn wpisanych w nią liczb. Wykaż, że pewne dwa z ośmiu uzyskanych wyników są równe.

Rozwiązanie

Zauważmy, że możliwe sumy czterech składników równych 1 lub 2 (czyli możliwe sumy liczb wpisanych w jeden wiersz tabeli) to

$$1+1+1+1=4, \quad 1+1+1+2=5, \quad 1+1+2+2=6, \quad 1+2+2+2=7, \quad 2+2+2+2=8.$$

Z kolei możliwe iloczyny czterech czynników równych 1 lub 2 (czyli możliwe iloczyny liczb wpisanych w jedną kolumnę tabeli) to

$$1\cdot1\cdot1\cdot1=1, \quad 1\cdot1\cdot1\cdot2=2, \quad 1\cdot1\cdot2\cdot2=4, \quad 1\cdot2\cdot2\cdot2=8, \quad 2\cdot2\cdot2\cdot2=16.$$

Łącznie jest więc dokładnie 8 możliwych wyników: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 16.

Przypuśćmy wbrew tezie zadania, że żaden wynik się nie powtórzył. To oznacza, że każdy z ośmiu możliwych wyników został uzyskany dokładnie raz. W szczególności wynika z tego, że wśród otrzymanych wyników są liczby 1 oraz 16, które można uzyskać wyłącznie za pomocą

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Ministerstwo Edukacji i Nauki

mnożenia liczb wpisanych w pewną kolumnę. Wobec tego w tabeli jest zarówno kolumna złożona z samych jedynek, jak i kolumna złożona z samych dwójek. Jednak to oznacza, że są tylko trzy możliwe wyniki dodawania w wierszach:

$$1+2+1+1=5, \quad 1+2+1+2=6, \quad 1+2+2+2=7.$$

Skoro są cztery wiersze, to pewien z trzech powyższych wyników się powtórzył. Uzyskaliśmy sprzeczność z poczynionym na początku założeniem, że żaden wynik się nie powtórzył.

Uwaga

Rozumowanie przeprowadzone powyżej przenosi się bezpośrednio na ogólniejszy przypadek tabeli $2^n \times 2^n$, gdzie n jest liczbą naturalną.

Rozważmy jeszcze ogólniejszy problem: dla tabeli o w wierszach i k kolumnach. Podobnie jak w zadaniu wypełniamy ją liczbami 1 lub 2 oraz wyznaczamy sumy liczb w wierszach oraz iloczyny liczb w kolumnach. Dla jakich par (w,k) może się zdarzyć, że pośród $w+k$ uzyskanych wyników żaden się nie powtórzył? Można udowodnić, że takie rozmieszczenie liczb istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $(w,k)=(2^n-1,2^n)$ dla pewnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki