XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia

(18 marca 2023 r.)

Matematyczna Olimpiada Juniorów
www.omj.edu.pl

1. Czy istnieją takie niezerowe liczby rzeczywiste x, y, z, że

$$x+\frac{1}{y}=z, \quad y+\frac{1}{z}=x, \quad z+\frac{1}{x}=y?$$

Odpowiedź uzasadnij.

2. Dane są liczby całkowite a i b, przy czym $a>b>1$ oraz liczba b jest największym z tych dzielników liczby a, które są różne od a. Udowodnij, że liczba $a+b$ nie jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym.

3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC<BC$ oraz $\sphericalangle ACB=60^\circ$. Punkt D, różny od A, leży na odcinku AC, przy czym $AB=BD$, a punkt E, różny od B, leży na prostej BC, przy czym $AB=AE$. Wykaż, że $\sphericalangle DEC=30^\circ$.

4. Dana jest liczba nieparzysta $n\geqslant 1$ oraz n strzałek ułożonych kolejno od lewej do prawej, przy czym każda strzałka wskazuje albo w lewo, albo w prawo. Udowodnij, że pewna strzałka jest wskazywana przez dokładnie tyle strzałek, na ile sama wskazuje.

Uwaga: Przykładowo dla $n=5$ i ułożenia $\rightarrow\rightarrow\leftarrow\leftarrow\rightarrow$ kolejne strzałki (od lewej) wskazują odpowiednio na 4, 3, 2, 3, 0 strzałek.

5. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych m, n o tej własności, że liczba $(m+n)$-cyfrowa

$$\underbrace{33\ldots3}_{m}\underbrace{66\ldots6}_{n}$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki