XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (18 marca 2023 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Czy istnieją takie niezerowe liczby rzeczywiste x, y, z, że

$$x+\frac{1}{y}=z, \quad y+\frac{1}{z}=x, \quad z+\frac{1}{x}=y?$$

Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Sposób I

Przypuśćmy, że istnieją liczby x, y, z spełniające trzy dane równości. Mnożąc pierwszą równość obustronnie przez y, drugą przez z, a trzecią przez x, uzyskujemy

$$xy+1=yz, \quad yz+1=zx, \quad zx+1=xy.$$

Po dodaniu stronami trzech powyższych równości otrzymujemy

$$xy+yz+zx+3=xy+yz+zx, \quad \text{czyli} \quad 3=0.$$

Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieją liczby x, y, z spełniające warunki zadania.

Sposób II

Zauważmy, że co najmniej dwie spośród liczb x, y, z są tego samego znaku. Przypuśćmy, że są to liczby x oraz y. Wówczas liczba $z=x+\frac{1}{y}$ również jest tego samego znaku co liczby x i y, czyli wszystkie trzy liczby są dodatnie lub wszystkie trzy liczby są ujemne. Do analogicznej konkluzji dochodzimy w pozostałych przypadkach (tj. gdy liczby y oraz z są tego samego znaku oraz gdy liczby z oraz x są tego samego znaku).

Jeżeli wszystkie liczby x, y, z są dodatnie, to również liczby $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ są dodatnie, a zatem

$$x=y+\frac{1}{z}>y=z+\frac{1}{x}>z=x+\frac{1}{y}>x,$$

co nie może mieć miejsca. Podobną sprzeczność uzyskujemy, jeśli wszystkie liczby x, y, z są ujemne:

$$x=y+\frac{1}{z}<y=z+\frac{1}{x}<z=x+\frac{1}{y}<x.$$

Uwaga

Przypadek, gdy wszystkie liczby x, y, z są tego samego znaku można wykluczyć również innymi sposobami. Przykładowo, dodając stronami trzy dane w treści zadania równości, uzyskujemy

$$x+\frac{1}{y}+y+\frac{1}{z}+z+\frac{1}{x}=z+x+y, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0.$$

Jednak ostatnia równość nie może być spełniona gdy liczby x, y, z są tego samego znaku (gdyż liczba $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ jest również tego znaku co każda z nich).

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Sposób III

Wyznaczymy z w zależności od x oraz y z każdego z trzech danych równań. Pierwsze równanie już ma taką postać. Drugie równanie możemy przekształcić do postaci $\frac{1}{z} = x - y$ skąd wniosek, że $x - y \neq 0$ oraz $z = \frac{1}{x-y}$. Z trzeciego równania mamy $z = y - \frac{1}{x}$. Łącząc te obserwacje, otrzymujemy

$$z = x + \frac{1}{y} = \frac{1}{x-y} = y - \frac{1}{x}, \quad \text{czyli} \quad \frac{xy+1}{y} = \frac{1}{x-y} = \frac{xy-1}{x}.$$

Z pierwszej i drugiej z uzyskanych proporcji dostajemy

$$(xy+1)(x-y) = y \quad \text{oraz} \quad (xy-1)(x-y) = x.$$

Po odjęciu powyższych dwóch równości stronami, otrzymujemy

$$((xy+1)-(xy-1))(x-y) = y-x \quad \text{czyli} \quad 2(x-y) = y-x.$$

Ostatnia równość prowadzi do wniosku, że $x = y$ wbrew poczynionej wcześniej obserwacji, że $x - y \neq 0$. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieją liczby spełniające warunki zadania.

---

2. Dane są liczby całkowite a i b, przy czym $a > b > 1$ oraz liczba b jest największym z tych dzielników liczby a, które są różne od a. Udowodnij, że liczba $a+b$ nie jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym.

Rozwiązanie

Sposób I

Jeżeli a jest liczbą parzystą, to największym dzielnikiem liczby a różnym od a jest $\frac{a}{2}$, skąd $2b = a$. Wówczas liczba $a + b = 3b$ jest podzielna przez 3, więc nie jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym.

Jeżeli a jest liczbą nieparzystą, to największym dzielnikiem liczby a różnym od a jest $\frac{a}{k}$ dla pewnej liczby nieparzystej $k \geqslant 3$, skąd $kb = a$. Wówczas liczba $a + b = (k+1)b$ posiada dzielnik nieparzysty większy od 1 (jest nim b), czyli nie jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym.

Sposób II

Niech p będzie najmniejszym dzielnikiem pierwszym liczby a, czyli najmniejszym dzielnikiem a różnym od 1. Wówczas $a = p \cdot b$.

Przypuśćmy, że $a + b = b(p+1)$ jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym. Wówczas zarówno b, jak i $p+1$ są liczbami parzystymi, gdyż są to liczby większe od 1. Jednak z parzystości liczby b wynika parzystość liczby a, skąd wniosek, że $p = 2$, a to przeczy parzystości liczby $p+1$.

Uwaga 1.

Dodatnie dzielniki liczby a różne od a nazywamy dzielnikami *właściwymi* liczby a.

Uwaga 2.

Można udowodnić, że suma wszystkich dodatnich dzielników liczby naturalnej N (włączając ją samą) jest potęgą dwójki wtedy i tylko wtedy, gdy N jest iloczynem różnych *liczb pierwszych Mersenne'a* (czyli liczb pierwszych postaci $2^k - 1$).

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC < BC$ oraz $\sphericalangle ACB = 60°$. Punkt D, różny od A, leży na odcinku AC, przy czym $AB = BD$, a punkt E, różny od B, leży na prostej BC, przy czym $AB = AE$. Wykaż, że $\sphericalangle DEC = 30°$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że skoro $AC < BC$, to $\sphericalangle ABC < \sphericalangle BAC$. Ponieważ $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC = 120°$, więc $\sphericalangle ABC < 60°$, skąd

$$\sphericalangle AEB = \sphericalangle ABE = \sphericalangle ABC < 60° = \sphericalangle ACB,$$

co oznacza, że punkt E leży na przedłużeniu boku BC (poza odcinkiem BC).

Skoro $\sphericalangle ECD = 180° - \sphericalangle ACB = 120°$, to do rozwiązania zadania wystarczy uzasadnić, że $CD = CE$. Będzie to oznaczało, że w trójkącie równoramiennym CDE kąt między podstawą a ramieniem ma miarę $\frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$.

Rozwiązanie dokończymy kilkoma sposobami.

Sposób I

Niech punkty K oraz L będą odpowiednio środkami odcinków AD oraz BE (rys. 1). Ponieważ te punkty są środkami podstaw trójkątów równoramiennych ABD oraz ABE, więc są także spodkami wysokości poprowadzonych na podstawy w tych trójkątach, skąd

$$\sphericalangle BKC = \sphericalangle ALC = 90°.$$

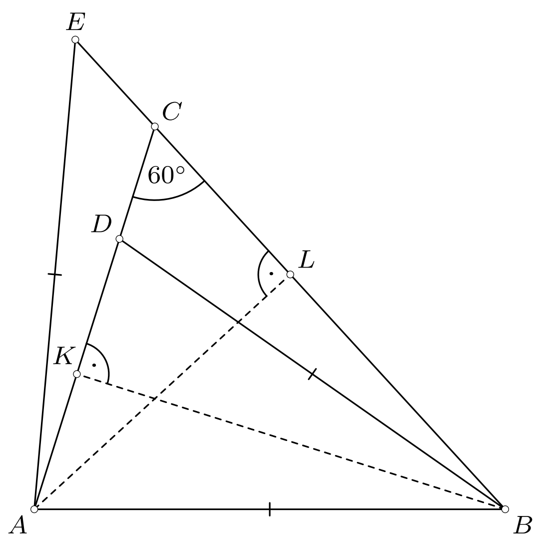
W trójkątach prostokątnych BKC i ALC kąt wewnętrzny przy wierzchołku C ma miarę $60°$, więc trójkąty te są połówkami trójkątów równobocznych. To oznacza, że $2 \cdot CK = BC$ oraz $2 \cdot CL = AC$. Wobec tego

$$CD = CK - DK = CK - AK = CK - (AC - CK) = 2 \cdot CK - AC = BC - AC$$

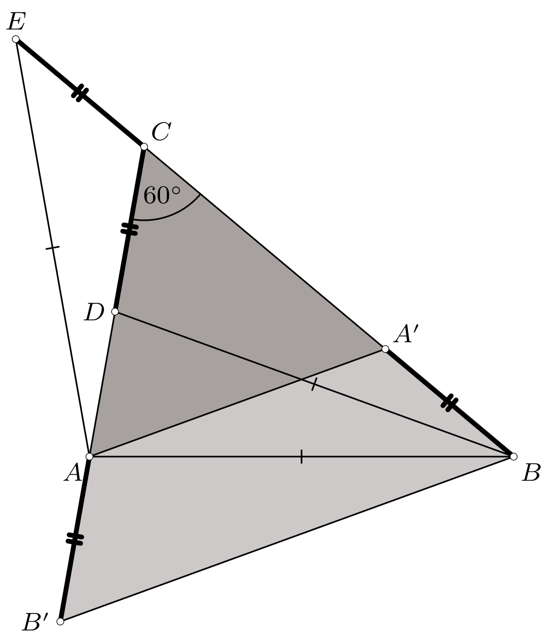
oraz

$$CE = EL - CL = BL - CL = (BC - CL) - CL = BC - 2 \cdot CL = BC - AC.$$

To oznacza, że $CD = CE$ i w konsekwencji, jak zauważyliśmy na początku, $\sphericalangle DEC = 30°$.



rys. 1



rys. 2

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Sposób II

Niech A' będzie punktem symetrycznym do C względem wysokości trójkąta poprowadzonej z wierzchołka A oraz B' będzie punktem symetrycznym do C względem wysokości trójkąta poprowadzonej z wierzchołka B (rys. 2). Wówczas $AA'C$ oraz $BB'C$ są trójkątami równoramiennymi o jednym z kątów wewnętrznych równym $60°$, więc są to trójkąty równoboczne. Ponadto z określenia punktów A' oraz B' wynika, że $AB' = CD$ oraz $A'B = CE$. Wobec tego

$$CD = AB' = B'C - AC = BC - A'C = A'B = CE,$$

czyli CDE jest trójkątem równoramiennym o kącie między ramionami równym $120°$. Wobec tego kąt DEC między podstawą a ramieniem w tym trójkącie, ma miarę $\frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$.

Sposób III

Niech P będzie takim punktem leżącym po tej samej stronie prostej AB co punkt C, że trójkąt ABP jest równoboczny (rys. 3). Przyjmijmy oznaczenie $\alpha = \sphericalangle PAC$. Wówczas

$$\sphericalangle BAC = 60° + \alpha \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ABC = 180° - 60° - (60° + \alpha) = 60° - \alpha.$$

W konsekwencji $\sphericalangle PBC = 60° - \sphericalangle ABC = \alpha$. Ponadto mamy

$$60° + \alpha = \sphericalangle BAD = \sphericalangle ADB = 180° - \sphericalangle BDC = \sphericalangle DCB + \sphericalangle DBC = 60° + \sphericalangle DBC,$$

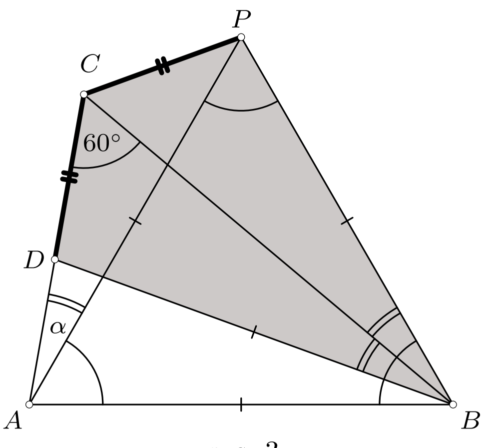
skąd $\sphericalangle DBC = \alpha$. Uzyskana równość $\sphericalangle PBC = \sphericalangle DBC$ w połączeniu z $BP = AB = BD$ oznacza, że trójkąty PBC oraz DBC są przystające (cecha bok–kąt–bok) i wobec tego $CD = CP$.

Mamy również

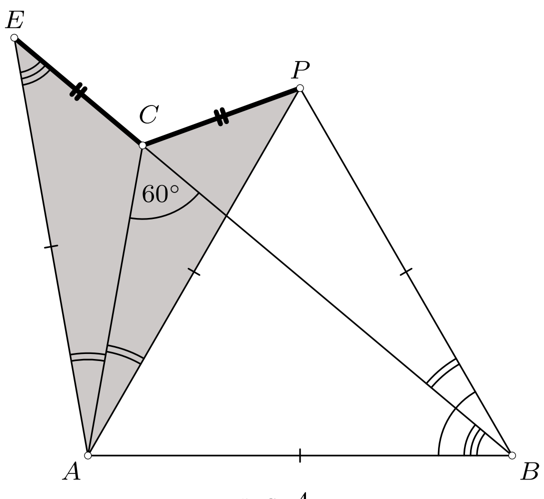
$$\sphericalangle EAC = 180° - \sphericalangle ACE - \sphericalangle AEC = 60° - \sphericalangle AEB = 60° - \sphericalangle ABE = \sphericalangle PBC = \alpha,$$

skąd $\sphericalangle EAC = \sphericalangle PAC$. W połączeniu z $AP = AB = AE$ uzyskujemy przystawanie trójkątów EAC oraz PAC (cecha bok–kąt–bok, rys. 4) i w konsekwencji równość $CE = CP$.

Mamy więc $CD = CP = CE$, skąd wynika teza zadania.



rys. 3



rys. 4

Uwaga 1.

Z przeprowadzonego rozumowania wynika, że trójkąt DEP jest równoboczny, a punkt C jest środkiem tego trójkąta.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

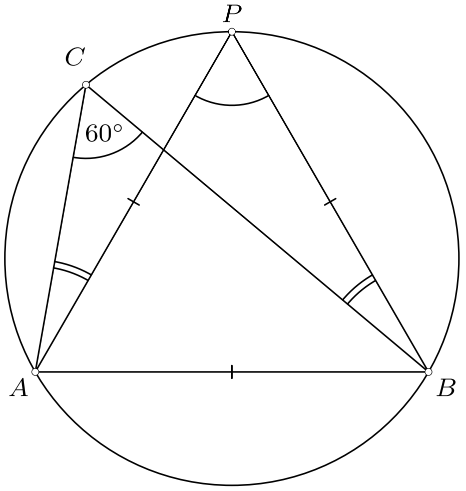
Ministerstwo Edukacji i Nauki

Uwaga 2.

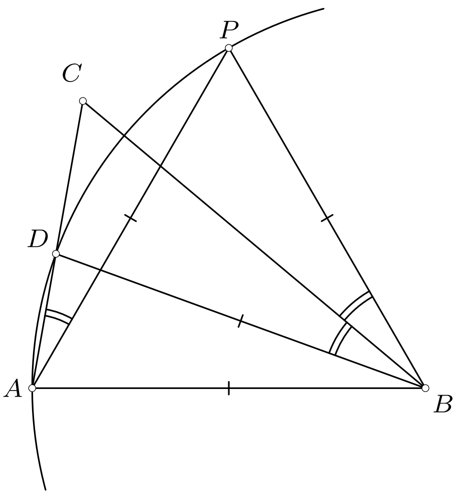
Istnieje wiele innych niż przedstawione powyżej wariantów prowadzenia rozumowania po wprowadzeniu punktu P. W szczególności skuteczne okazują się argumenty wykorzystujące własności *kątów w okręgu.*

Sposób IV

Określmy punkt P tak jak w poprzednim sposobie rozwiązania, tzn. w taki sposób, że ABP jest trójkątem równobocznym skierowanym do wewnątrz trójkąta ABC (rys. 5). Ponieważ $\sphericalangle ACB = 60° = \sphericalangle APB$ oraz punkty C i P leżą po tej samej stronie prostej AB, więc punkty A, B, P, C leżą na jednym okręgu. W szczególności $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CBP$, gdyż są to kąty wpisane w ten okrąg i oparte na tym samym łuku.



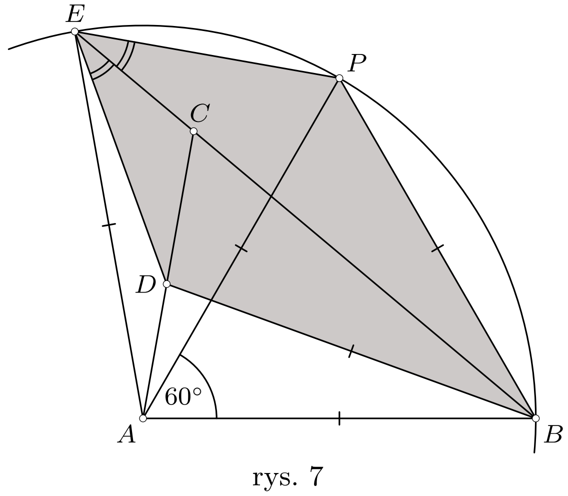
rys. 5



rys. 6

Ponieważ $AB = DB = PB$, więc punkty A, D, P leżą na okręgu o środku w punkcie B (rys. 6). Wobec tego na mocy *twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym* uzyskujemy równość $\sphericalangle DBP = 2\sphericalangle DAP$, która w połączeniu z uzyskaną wcześniej równością $\sphericalangle DAP = \sphericalangle CBP$ oznacza, że $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DBP - \sphericalangle CBP = \sphericalangle CBP$. W konsekwencji trójkąty DBE oraz PBE są przystające (cecha bok–kąt–bok).

Wreszcie skoro $AB = AE = AP$, to punkty B, E, P leżą na okręgu o środku w punkcie A (rys. 7). Ponownie korzystając z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym, uzyskujemy $\sphericalangle BEP = \frac{1}{2}\sphericalangle BAP = 30°$. Pozostaje zauważyć, że $\sphericalangle BEP = \sphericalangle BED$ ze względu na uzasadnione wcześniej przystawanie trójkątów DBE oraz PBE.



rys. 7

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

4. Dana jest liczba nieparzysta $n \geqslant 1$ oraz n strzałek ułożonych kolejno od lewej do prawej, przy czym każda strzałka wskazuje albo w lewo, albo w prawo. Udowodnij, że pewna strzałka jest wskazywana przez dokładnie tyle strzałek, na ile sama wskazuje.

Uwaga: Przykładowo dla $n=5$ i ułożenia $\rightarrow\rightarrow\leftarrow\leftarrow\rightarrow$ kolejne strzałki (od lewej) wskazują odpowiednio na 4, 3, 2, 3, 0 strzałek.

Rozwiązanie

Sposób I

Ponieważ łączna liczba strzałek jest nieparzysta, więc w pewną stronę (prawo lub lewo) wskazuje nieparzysta liczba strzałek. To oznacza, że pośród tych nieparzyście wielu strzałek istnieje *środkowa*, czyli taka, że na lewo i na prawo od niej znajduje się tyle samo strzałek wskazujących w tym samym kierunku, co ona. Ta środkowa strzałka, nazwijmy ją s, spełnia warunki zadania, gdyż:

- pośród pozostałych strzałek wskazujących w tym samym kierunku, co s, dokładnie połowa wskazuje na s i dokładnie połowa jest wskazywana przez s;
- pośród strzałek wskazujących w przeciwnym kierunku niż s dokładnie te same strzałki wskazują na s i są przez s wskazywane.

Uwaga

Zawsze istnieje *dokładnie jedna* strzałka spełniająca warunki zadania.

Sposób II

Strzałkę, która jest wskazywana przez dokładnie tyle strzałek, na ile sama wskazuje nazwijmy *ciekawą*. Zauważmy, że zamiana miejscami dwóch sąsiednich strzałek wskazujących na siebie nawzajem nie zmienia stanu żadnej z nich (tzn. strzałka jest ciekawa po zamianie wtedy i tylko wtedy, gdy była ciekawa przed zamianą). Rzeczywiście, po zamianie konfiguracji $\rightarrow\leftarrow$ na $\leftarrow\rightarrow$, każda z dwóch rozważanych strzałek wskazuje na o dokładnie jedną strzałkę mniej niż przed zamianą i jest wskazywana przez o dokładnie jedną strzałkę mniej niż przed zamianą.

Wykonując skończenie wiele takich zamian możemy uzyskać sytuację, w której kolejno od lewej do prawej ułożone są najpierw wszystkie strzałki wskazujące w lewo, a następnie wszystkie strzałki wskazujące w prawo (być może w pewnym kierunku nie ma żadnej strzałki). Pozostaje zauważyć, że środkowa strzałka w kierunku reprezentowanym przez nieparzystą liczbę strzałek jest ciekawa.

---

5. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych m, n o tej własności, że liczba $(m+n)$-cyfrowa

$$\underbrace{33\ldots3}_{m}\underbrace{66\ldots6}_{n}$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Sposób I

Przypuśćmy, że para m, n spełnia warunki zadania. Wówczas liczba

$$\underbrace{33\ldots3}_{m}\underbrace{66\ldots6}_{n}$$

jest kwadratem liczby parzystej, a zatem jest postaci $(2k)^2=4k^2$ dla pewnej liczby całkowitej k. W szczególności jest to liczba podzielna przez 4.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Zauważmy, że na mocy cechy podzielności przez 4 liczba zakończona cyframi „66” nie jest podzielna przez 4. To oznacza, że rozważana liczba może kończyć się tylko jedną szóstką, czyli $n=1$.

Dla $m=1$ uzyskujemy rozwiązanie, gdyż $36=6^2$. Z kolei dla $m=2$ liczba 336 nie jest kwadratem liczby całkowitej, gdyż $18^2<336<19^2$. Przypuśćmy, że $m\geqslant 3$. Zauważmy, że

$$k^2=\frac{1}{4}\cdot\underbrace{33\ldots3}_{m}6=8\underbrace{33\ldots3}_{m-2}4.$$

Skoro $m\geqslant 3$, to cyfra dziesiątek powyższej liczby jest równa 3, a zatem liczba k^2 jest zakończona cyframi „34”. Ponownie korzystając z cechy podzielności przez 4 stwierdzamy, że taka liczba jest niepodzielna przez 4. Jednak liczba parzysta niepodzielna przez 4 nie może być kwadratem liczby całkowitej — w przypadku $m\geqslant 3$ nie ma zatem rozwiązań.

Sposób II

Podobnie jak w poprzednim sposobie stwierdzamy, że dla $n\geqslant 2$ dana w treści zadania liczba jest parzysta ale niepodzielna przez 4, więc nie może być kwadratem liczby całkowitej. Wobec tego daną liczbę można zapisać w postaci

$$3+\underbrace{33\ldots3}_{m+1}=3+\frac{1}{3}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{m+1}=3+\frac{1}{3}\left(10^{m+1}-1\right).$$

Przypuśćmy, że powyższa liczba jest kwadratem liczby całkowitej a, czyli

$$a^2=3+\frac{1}{3}\left(10^{m+1}-1\right).$$

Przekształcając tę równość, uzyskujemy

$$3a^2=10^{m+1}+8. \qquad (*)$$

Jeżeli $m=1$, to $a=6$. Jeżeli $m=2$, to $\frac{1}{3}\cdot 1008=336$ nie jest kwadratem. Jeżeli $m\geqslant 3$, to liczba $10^{m+1}+8$ daje resztę 8 przy dzieleniu przez 16, więc jest podzielna przez 8 ale nie jest podzielna przez 16. To oznacza, że w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby stojącej po prawej stronie równości $(*)$ dwójka występuje dokładnie 3 razy. Tymczasem w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby stojącej po lewej stronie równości $(*)$ dwójka występuje parzystą liczbę razy (jest to dwukrotność liczby wystąpień czynnika 2 w rozkładzie liczby a). Uzyskana sprzeczność oznacza, że w przypadku $m\geqslant 3$ nie ma rozwiązań.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki