

XII Olimpiada Matematyczna Juniorów (2016/17)

Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia —
część korespondencyjna

(1 września – 17 października 2016 r.)

1. Liczby wymierne a, b, c spełniają równanie

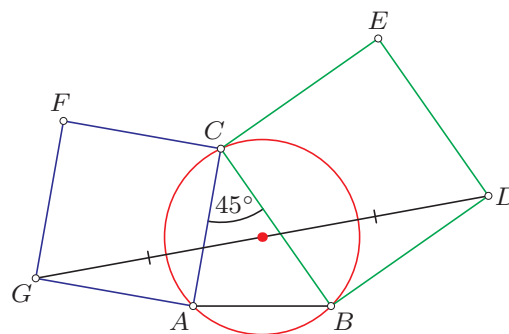
$$(a+b+c)(a+b-c) = c^2.$$

Wykaż, że $a+b=c=0$.

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym

$$\sphericalangle ACB = 45^\circ.$$

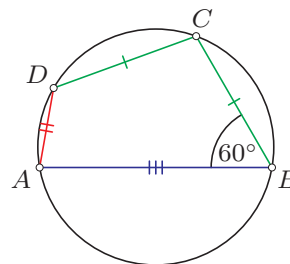
Niech $BCED$ oraz $ACFG$ będą kwadratami leżącymi na zewnątrz trójkąta ABC . Udowodnij, że środek odcinka DG pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .



Zadanie 2

3. W każde pole tablicy 11×11 należy wpisać jedną z liczb $-1, 0, 1$ w taki sposób, aby suma liczb w każdej kolumnie była nieujemna, a suma liczb w każdym wierszu była niedodatnia. Jaką najmniejszą liczbę zer można w ten sposób wpisać w pola tablicy? Odpowiedź uzasadnij.

4. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, przy czym $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ oraz $BC = CD$. Udowodnij, że $AB = AD + DC$.



Zadanie 4

5. Liczby całkowite a, b są dodatnie. Wykaż, że co najmniej jedną z liczb $a, b, a+b$ można przedstawić w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb całkowitych.

6. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt równoboczny ABC o boku 1. Ponadto

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = \sphericalangle CDA = 90^\circ.$$

Oblicz objętość ostrosłupa $ABCD$.

7. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b , że liczba $a+b+1$ jest dzielnikiem pierwszym liczby $4ab-1$. Udowodnij, że $a=b$.

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMJ lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMJ właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

17 października 2016 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMJ, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przesyłania prac, a także regulamin OMJ i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: www.omj.edu.pl.