XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (12 stycznia 2019 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają nierówność $x^2+x \leqslant y$. Udowodnij, że $y^2+y \geqslant x$.

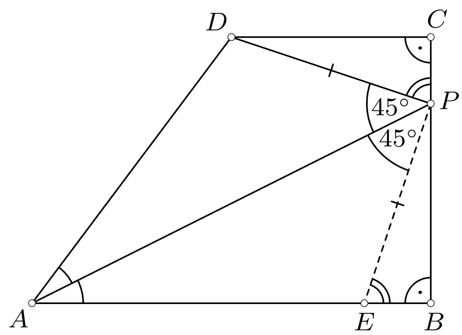
Szkic rozwiązania

Zauważmy, że $y^2+y \geqslant y^2+x^2+x \geqslant x$, gdyż $y^2+x^2 \geqslant 0$.

2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym $\sphericalangle ABC = 90°$. Dwusieczna kąta BAD przecina odcinek BC w punkcie P. Wykaż, że jeśli $\sphericalangle APD = 45°$, to pole czworokąta $APCD$ jest równe polu trójkąta ABP.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że $\sphericalangle CPD < 90°$, wobec czego $\sphericalangle BPD > 90°$. W związku z tym $\sphericalangle APB > 45°$. Na *odcinku* AB można więc wskazać taki punkt E, że $\sphericalangle APE = 45°$ (rys. 1).



rys. 1

Z równości $\sphericalangle APE = \sphericalangle APD$ oraz $\sphericalangle EAP = \sphericalangle DAP$ wynika, że trójkąty APE oraz APD są przystające (cecha kąt–bok–kąt). Stąd wniosek, że $PE = PD$. Ponadto

$$\sphericalangle BEP = 90° - \sphericalangle BPE = 180° - \sphericalangle DPE - \sphericalangle BPE = \sphericalangle CPD,$$

wobec czego trójkąty prostokątne BEP oraz CPD są przystające (cecha kąt–bok–kąt).

W konsekwencji, pola trójkątów APE i APD są równe oraz pola trójkątów BEP i CPD są równe. Pole czworokąta $APCD$ jest więc równe polu trójkąta ABP.

Uwaga

Z powyższego rozumowania wynika, że także obwód czworokąta $APCD$ jest równy obwodowi trójkąta ABP.

3. Dany jest 101-kąt foremny. Prosta ℓ leży w płaszczyźnie tego wielokąta i nie przechodzi przez żaden z jego wierzchołków. Udowodnij, że prosta ℓ przecina parzystą liczbę przekątnych danego wielokąta.

Szkic rozwiązania

Jeżeli prosta ℓ nie przecina wielokąta, to przecina 0 przekątnych tego wielokąta, a 0 jest liczbą parzystą. W dalszej części rozwiązania załóżmy więc, że prosta ℓ przechodzi przez wnętrze wielokąta.

Łączna liczba przekątnych i boków przecinających prostą ℓ jest równa liczbie wszystkich odcinków o końcach w wierzchołkach danego wielokąta, których jeden koniec leży po jednej stronie prostej ℓ, a drugi — po drugiej. Jeżeli po jednej ze stron prostej ℓ znajduje się n wierzchołków danego 101-kąta, to po drugiej stronie tej prostej jest dokładnie $101-n$ wierzchołków tego wielokąta. Jeden koniec boku lub przekątnej przecinających prostą ℓ możemy więc wybrać n sposobów, a drugi na $101-n$ sposobów. W związku z tym łączna liczba przekątnych i boków przecinających prostą ℓ jest równa $n\cdot(101-n)$. A ponieważ prosta ℓ przecina dokładnie dwa boki wielokąta, więc liczba przekątnych przecinających prostą ℓ jest równa $n\cdot(101-n)-2$.

Suma liczb n oraz $101-n$ jest liczbą nieparzystą, a zatem jedna z liczb n lub $101-n$ jest parzysta, a druga nieparzysta. Wobec tego ich iloczyn jest liczbą parzystą. Ostatecznie również liczba $n\cdot(101-n)-2$ jest parzysta, co było do udowodnienia.

---

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB=3\cdot BC$. Punkty P i Q leżą na boku AB i spełniają warunek $AP=PQ=QB$. Punkt M jest środkiem boku AC. Wykaż, że $\sphericalangle PMQ=90°$.

Szkic rozwiązania

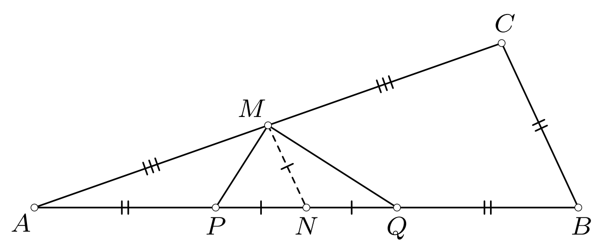
Oznaczmy przez N środek odcinka AB. Wówczas punkt N jest także środkiem odcinka PQ (rys. 2). Zauważmy, że

$$3\cdot PQ=AP+PQ+QB=AB=3\cdot BC,$$

wobec czego $PQ=BC$ i w konsekwencji

$$NM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}PQ=NP=NQ.$$

Punkt N jest więc środkiem okręgu opisanego na trójkącie PQM oraz leży na boku PQ tego trójkąta. Stąd wniosek, że $\sphericalangle PMQ=90°$, co kończy dowód.



rys. 2

Uwaga

W treści zadania zakładaliśmy, że bok trójkąta jest odcinkiem *otwartym*, tzn. nie zawiera swoich końców. W przeciwnym przypadku teza zadania nie jest prawdziwa. Przyjmując bowiem $P=B$ oraz $A=Q$, widzimy, że warunek $AP=PQ=QB$ jest spełniony, jednak kąt PMQ jest rozwarty.

---

5. W zapisie dziesiętnym pewnej dodatniej liczby całkowitej n nie występuje żadna z cyfr 1, 2, 9. Udowodnij, że w zapisie dziesiętnym liczby $3n$ występuje co najmniej jedna z cyfr 1, 2, 9.

Szkic rozwiązania

Przyjmijmy, że n jest liczbą k-cyfrową. Z warunków zadania wynika, że pierwsza cyfra liczby n jest różna od 1, 2 oraz 9. Warunek ten oznacza, że $3\cdot 10^{k-1}\leqslant n<9\cdot 10^{k-1}$. Mnożąc nierówności te obustronnie przez 3, uzyskujemy $9\cdot 10^{k-1}\leqslant 3n<27\cdot 10^{k-1}$. Stąd wniosek, że $3n$ jest k-cyfrową liczbą rozpoczynającą się cyfrą 9 lub $(k+1)$-cyfrową liczbą rozpoczynającą się cyfrą 1 lub 2. We wszystkich tych przypadkach liczba $3n$ ma pierwszą cyfrę równą 1, 2 lub 9.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku