XII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia (25 marca 2017 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

---

1. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c, dla których liczba

$$\frac{a\sqrt{2}+b}{b\sqrt{2}+c}$$

jest wymierna. Wykaż, że liczba $ab+bc+ca$ jest podzielna przez liczbę $a+b+c$.

Szkic rozwiązania

W rozwiązaniu wykorzystamy następujący fakt: *jeżeli liczby x, y oraz $z=x+y\sqrt{2}$ są wymierne, to $y=0$.* Rzeczywiście, gdyby $y\neq 0$, to moglibyśmy zapisać

$$\sqrt{2}=\frac{z-x}{y},$$

co prowadzi do sprzeczności, gdyż lewa strona powyższej równości jest liczbą niewymierną, a prawa — wymierną.

Ponieważ $b\neq 0$, więc z powyższej obserwacji wynika, że liczba $b\sqrt{2}-c$ jest niewymierna, w szczególności jest różna od 0. Wobec tego możemy rozszerzyć dany w treści zadania ułamek o tę liczbę, otrzymując

$$\frac{a\sqrt{2}+b}{b\sqrt{2}+c}=\frac{(a\sqrt{2}+b)(b\sqrt{2}-c)}{(b\sqrt{2}+c)(b\sqrt{2}-c)}=\frac{2ab-bc}{2b^2-c^2}+\frac{b^2-ac}{2b^2-c^2}\sqrt{2}=x+y\sqrt{2}\,.$$

Liczby a, b, c są całkowite, więc liczby x, y są wymierne. Z treści zadania wiemy ponadto, że liczba $x+y\sqrt{2}$ jest wymierna. Wobec tego $y=0$, czyli $b^2-ac=0$. Stąd

$$ab+bc+ca=ab+bc+b^2=b(a+b+c)\,,$$

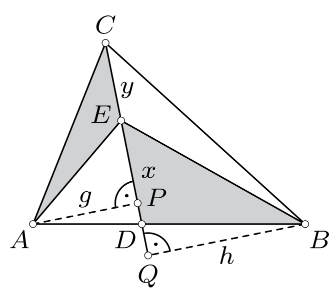
co natychmiast daje postulowaną podzielność.

---

2. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Punkt E leży na odcinku CD. Wykaż, że jeżeli suma pól trójkątów ACE i BDE jest równa połowie pola trójkąta ABC, to punkt D jest środkiem boku AB lub punkt E jest środkiem odcinka CD.

Szkic rozwiązania

Niech P i Q będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na prostą CD (rys. 1). Przyjmijmy ponadto oznaczenia: $DE=x$, $CE=y$, $AP=g$, $BQ=h$.



rys. 1

Z treści zadania wynika, że suma pól trójkątów ACE i BDE jest równa sumie pól trójkątów BCE i ADE, czyli

$$\frac{1}{2}yg+\frac{1}{2}xh=\frac{1}{2}yh+\frac{1}{2}xg\,.$$

Zależność ta jest równoważna równości $(g-h)(x-y)=0$. Wobec tego $g=h$ lub $x=y$.

Z równości $g=h$ wynika, że (być może zdegenerowane) trójkąty prostokątne ADP i BDQ są przystające (cecha kąt–bok–kąt), skąd wniosek, że punkt D jest środkiem odcinka AB. Z kolei równość $x=y$ oznacza, że punkt E jest środkiem odcinka CD.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Uwaga

Można udowodnić, że zbiorem wszystkich punktów X leżących wewnątrz trójkąta ABC, dla których suma pól trójkątów ACX i BDX jest równa połowie pola trójkąta ABC jest fragment prostej łączącej środki odcinków AB i CD zawarty we wnętrzu trójkąta.

Stąd natychmiast wynika teza zadania. Jeżeli bowiem punkt D nie jest środkiem odcinka AB, to prosta łącząca środki odcinków AB i CD przecina odcinek CD w dokładnie jednym punkcie: środku odcinka CD. Wobec tego punkt E musi pokrywać się ze środkiem odcinka CD.

---

3. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b, że każda z liczb

$$ab \quad \text{oraz} \quad (a+1)(b+1)$$

jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnij, że istnieje taka liczba całkowita $n>1$, dla której liczba $(a+n)(b+n)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Szkic rozwiązania

Jeżeli $a=b=1$, to $(a+n)(b+n)=(n+1)^2$ jest kwadratem liczby całkowitej dla dowolnej liczby $n>1$. W pozostałych przypadkach przyjmijmy $n=ab$. Wówczas $n>1$ oraz

$$(a+n)(b+n)=(a+ab)(b+ab)=ab\cdot(a+1)(b+1)\,.$$

Uzyskana liczba jest kwadratem liczby całkowitej, jako iloczyn kwadratów liczb całkowitych.

Uwaga

Istnieją pary (a,b) spełniające warunki zadania, w których $a\neq b$, na przykład $(1,49)$, $(2,242)$, $(3,48)$, $(8,288)$.

Okazuje się, że istnieje nawet nieskończenie wiele par (a,b) postaci $(1,n)$, które spełniają warunki zadania. Pary takie można uzyskać z pomocą rozwiązań w liczbach całkowitych równania $x^2-2y^2=-1$. Można udowodnić, że takich rozwiązań jest nieskończenie wiele.

Jeśli para (x,y) spełnia powyższe równanie (np. $(x,y)=(7,5)$), to przyjmując $n=x^2$, uzyskujemy $ab=x^2$ oraz $(a+1)(b+1)=2(x^2+1)=(2y)^2$. Obie liczby ab oraz $(a+1)(b+1)$ są więc kwadratami liczb całkowitych.

---

4. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ kąty wewnętrzne przy wierzchołkach B, C, E, F są równe. Ponadto spełniona jest równość

$$AB+DE=CD+FA.$$

Wykaż, że prosta AD oraz symetralne odcinków BC i EF mają punkt wspólny.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostych AB i CD, a przez Q punkt przecięcia prostych DE i FA (rys. 2).

Ponieważ $\sphericalangle ABC=\sphericalangle BCD=\sphericalangle DEF=\sphericalangle EFA$, więc również

$$\sphericalangle PBC=\sphericalangle BCP=\sphericalangle QEF=\sphericalangle EFQ,$$

a zatem trójkąty BCP oraz EFQ są podobnymi trójkątami równoramiennymi.

Równości $BP=CP$ oraz $EQ=FQ$ w połączeniu z $AB+DE=CD+FA$ prowadzą do

$$AB+DE+BP+EQ=CD+FA+CP+FQ, \quad \text{czyli} \quad AP+DQ=DP+AQ.$$

Ostatnia równość oznacza, że w czworokąt wypukły $APDQ$ można wpisać okrąg. Oznaczmy środek tego okręgu przez I, a jego punkty styczności z bokami AP, PD, DQ, QA odpowiednio przez K, L, M, N.

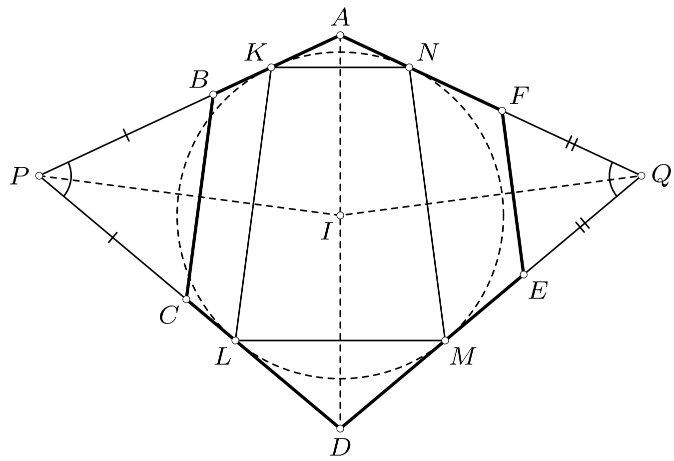
Symetralne odcinków BC i EF są odpowiednio dwusiecznymi kątów APD i AQD, więc przechodzą przez punkt I. Pozostaje wykazać, że punkt I leży na prostej AD.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku



rys. 2

Skoro $IK = IL = IM = IN$ oraz

$$\sphericalangle KIL = 180^\circ - \sphericalangle KPL = 180^\circ - \sphericalangle MQN = \sphericalangle MIN\,,$$

to trójkąty KLI oraz MNI są przystające (cecha bok–kąt–bok). Stąd $KL = MN$, a zatem wpisany w okrąg czworokąt $KLMN$ jest trapezem równoramiennym. Ponieważ $AK = AN$ oraz $DL = DM$, więc punkty A oraz D leżą na wspólnej symetralnej odcinków KN i LM. Na tej symetralnej leży punkt I. Zatem punkty A, D, I leżą na jednej prostej, co kończy rozwiązanie zadania.

---

5. Na stole leży n zapałek, które stanowią n jednoelementowych stosów. Adam chce połączyć je w jeden stos n-elementowy. Będzie to robił przy użyciu $n-1$ operacji, z których każda polega na połączeniu dwóch stosów w jeden. Adam umówił się z Bartkiem, że za każdym razem, gdy Adam połączy stos a-elementowy ze stosem b-elementowym, dostaje od Bartka $a \cdot b$ cukierków. Jaka jest największa możliwa liczba cukierków, które może dostać Adam po wykonaniu $n-1$ operacji? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Sposób I

Zauważmy, że w każdej z operacji liczba cukierków, które otrzymuje Adam jest równa liczbie par zapałek, z których jedna należy do jednego, a druga do drugiego stosu. Ponadto po wykonaniu operacji para zapełek z różnych stosów staje się parą zapałek z jednego stosu i taką pozostanie do końca całej procedury.

Na początku żadne dwie zapałki nie należały do tego samego stosu, na końcu zaś wszystkie zapałki tworzą jeden stos. Wobec tego łączna liczba cukierków, które otrzyma Adam jest równa liczbie wszystkich par zapałek.

Łączna liczba par zapałek może być obliczona w następujący sposób. Dla każdej z n zapałek drugą do pary możemy dobrać na $n-1$ sposobów. To daje $n(n-1)$ par, ale każda z nich została policzona dwukrotnie, wobec czego łączna liczba par zapałek jest równa $\frac{1}{2}n(n-1)$. Tyle cukierków dostanie Adam, niezależnie od tego, w jaki sposób będzie je łączył w stosy.

Sposób II

Oznaczmy przez S_k sumę kwadratów liczności stosów przed k-tą operacją wykonaną przez Adama oraz przez S_n — kwadrat liczności stosu uzyskanego na końcu. Mamy więc

$$S_1 = 1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2 = n \quad \text{oraz} \quad S_n = n^2.$$

Zauważmy, że jeżeli w k-tym ruchu Adam łączy stosy a-elementowy oraz b-elementowy, to

$$S_{k+1} - S_k = (a+b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab.$$

Wobec tego łączna liczba cukierków otrzymanych przez Adama jest równa

$$\tfrac{1}{2}(S_2 - S_1) + \tfrac{1}{2}(S_3 - S_2) + \ldots + \tfrac{1}{2}(S_n - S_{n-1}) = \tfrac{1}{2}(S_n - S_1) = \tfrac{1}{2}(n^2 - n)\,.$$

Zatem niezależnie od sposobu wykonywanych operacji, Adam otrzyma łącznie $\frac{1}{2}n(n-1)$ cukierków.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku