XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia (17 marca 2018 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

---

1. Dodatnie liczby nieparzyste a, b mają tę własność, że liczba $a^b b^a$ jest kwadratem liczby naturalnej. Wykaż, że liczba ab jest kwadratem liczby naturalnej.

Szkic rozwiązania

Ponieważ liczby a, b są nieparzyste, więc liczba $a^{\frac{b-1}{2}} b^{\frac{a-1}{2}}$ jest naturalna. Liczba

$$a^{b-1}b^{a-1} = \left(a^{\frac{b-1}{2}} b^{\frac{a-1}{2}}\right)^2$$

jest więc kwadratem liczby naturalnej. Wobec tego liczba naturalna

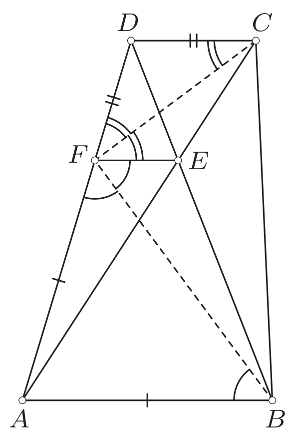
$$ab = \frac{a^b b^a}{a^{b-1}b^{a-1}}$$

jest ilorazem dwóch liczb, z których każda jest kwadratem liczby naturalnej. Stąd wniosek, że iloczyn ab jest kwadratem liczby naturalnej.

---

2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym $AB+CD=AD$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Prosta przechodząca przez punkt E i równoległa do podstaw trapezu przecina ramię AD w punkcie F. Udowodnij, że $\sphericalangle BFC = 90°$.

Szkic rozwiązania



Proste AB, CD i EF są równoległe, więc korzystając z twierdzenia Talesa, uzyskujemy

$$\frac{DF}{FA} = \frac{DE}{EB} = \frac{CD}{AB}.$$

Dodając 1 do obu stron uzyskanej zależności, otrzymujemy

$$\frac{AD}{FA} = \frac{AB+CD}{AB}.$$

Ponieważ $AD = AB+CD$, więc ostatnia równość implikuje $FA = AB$. Wobec tego również $DF = CD$. Stąd wniosek, że

$$\sphericalangle EFB = \sphericalangle FBA = \sphericalangle BFA \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle EFC = \sphericalangle FCD = \sphericalangle CFD.$$

W konsekwencji $\sphericalangle BFC = \frac{1}{2}\sphericalangle AFD = 90°$, co kończy rozwiązanie zadania.

---

3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Każdą z liczb $1, 2, 3, \ldots, 1000$ pomalowano jednym z n kolorów. Okazało się, że każde dwie liczby, z których jedna jest dzielnikiem drugiej są pomalowane różnymi kolorami. Wyznacz najmniejszą liczbę n, dla której taka sytuacja jest możliwa.

Szkic rozwiązania

Udowodnimy, że szukaną najmniejszą liczbą jest $n = 10$.

Zauważmy, że każde dwie spośród następujących dziesięciu liczb

$$2^0 = 1,\ 2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64,\ 2^7 = 128,\ 2^8 = 256,\ 2^9 = 512$$

mają tę własność, że jedna jest dzielnikiem drugiej. Wobec tego żadne dwie z tych liczb nie mogą mieć tego samego koloru, a zatem użytych musi być co najmniej 10 kolorów.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Z drugiej strony, malując liczbę 1 pierwszym kolorem, liczby 2 i 3 — drugim, liczby od 4 do 7 — trzecim, itd. aż w końcu liczby od 512 do 1000 — dziesiątym, uzyskujemy kolorowanie, w którym iloraz dowolnych dwóch liczb tego samego koloru jest mniejszy od 2. Stąd wniosek, że przy tym kolorowaniu każde dwie liczby, z których jedna jest dzielnikiem drugiej są pomalowane różnymi kolorami.

Uwaga

Można wskazać inne przykłady kolorowań przy użyciu 10 kolorów spełniające warunki zadania.

Ponumerujmy kolory liczbami od 0 do 9. Liczbę 1 pokolorujmy kolorem o numerze 0. Następnie zauważmy, że każda z liczb $2,3,4,\ldots,1000$ jest iloczynem co najwyżej dziewięciu liczb pierwszych, niekoniecznie różnych. Liczbę, która jest iloczynem m liczb pierwszych pokolorujmy kolorem o numerze m. Wówczas każde dwie różne liczby, z których jedna jest dzielnikiem drugiej zostały pokolorowane różnymi kolorami, gdyż liczby te mają różną liczbę dzielników pierwszych.

---

4. Liczby rzeczywiste a, b, c są różne od zera i spełniają układ równań

$$\begin{cases} a^2+a=b^2 \\ b^2+b=c^2 \\ c^2+c=a^2. \end{cases}$$

Udowodnij, że $(a-b)(b-c)(c-a)=1$.

Szkic rozwiązania

Dodając stronami trzy równania danego układu, uzyskujemy

$$a^2+a+b^2+b+c^2+c=b^2+c^2+a^2\,, \quad \text{skąd} \quad a+b+c=0.$$

W szczególności, skoro liczby a, b, c są różne od zera, to również liczby $b+c=-a$, $c+a=-b$, $a+b=-c$ są różne od zera.

Z pierwszego, drugiego i trzeciego równania danego układu wynika kolejno, że

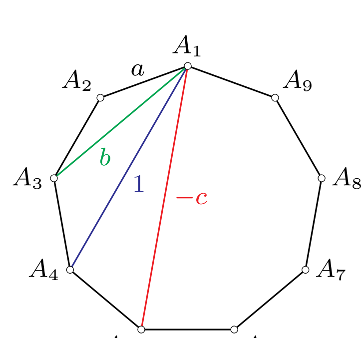
$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2=-a=b+c,$$
$$(b-c)(b+c)=b^2-c^2=-b=c+a,$$
$$(c-a)(c+a)=c^2-a^2=-c=a+b.$$

Mnożąc stronami powyższe równości, uzyskujemy

$$(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b)(b+c)(c+a)\,.$$

Liczba $(a+b)(b+c)(c+a)$ jest różna od zera, więc dzieląc przez nią obie strony ostatniej równości, uzyskujemy tezę zadania.

Uwaga



Można uzasadnić, że dany układ równań istotnie ma rozwiązanie (a,b,c), w którym wszystkie liczby a, b, c są różne od 0. Można je opisać geometrycznie w następujący sposób.

Rozważmy dziewięciokąt foremny $A_1A_2\ldots A_9$, w którym długość przekątnej A_1A_4 jest równa 1. Wówczas trójka liczb

$$a=A_1A_2\,, \quad b=A_1A_3 \quad \text{oraz} \quad c=-A_1A_5$$

spełnia dany w treści zadania układ równań.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

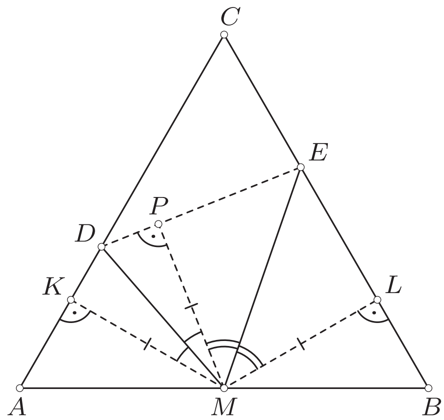
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

5. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta równobocznego ABC. Punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach AC i BC, przy czym $\sphericalangle DME = 60°$. Wykaż, że

$$AD + BE = DE + \tfrac{1}{2}AB\,.$$

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez K i L rzuty prostokątne punktu M odpowiednio na proste AC i BC. Wówczas $\sphericalangle KML = 120°$ oraz $KM = LM$.



Niech P będzie punktem symetrycznym do punktu K względem prostej DM. Wtedy $LM = KM = PM$, jak również

$$\sphericalangle EMP = 60° - \sphericalangle DMP = \tfrac{1}{2}(120° - \sphericalangle KMP) = \tfrac{1}{2}\sphericalangle LMP\,.$$

Wobec tego $\sphericalangle EMP = \sphericalangle EML$. Stąd wniosek, że trójkąty EMP i EML są przystające (cecha bok–kąt–bok). Ponadto $\sphericalangle DPM + \sphericalangle EPM = 90° + 90° = 180°$, więc punkt P leży na odcinku DE. W konsekwencji

$$AD + BE = DK + EL + AK + BL = DP + EP + \tfrac{1}{2}AM + \tfrac{1}{2}BM = DE + \tfrac{1}{2}AB\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku