

# XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia

(19 marca 2022 r.)



1. Dany jest kwadrat  $ABCD$  o boku 1. Punkty  $K, L, M, N$ , różne od wierzchołków kwadratu, leżą odpowiednio na odcinkach  $AB, BC, CD, DA$ . Wykaż, że obwód przynajmniej jednego z trójkątów  $ANK, BKL, CLM, DMN$  jest mniejszy od 2.

2. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite  $n$ , dla których obie liczby

$$1 \underbrace{77\dots7}_{n \text{ siódemek}} \quad \text{oraz} \quad 3 \underbrace{77\dots7}_{n \text{ siódemek}}$$

są pierwsze.

3. Dany jest równoległobok  $ABCD$ , w którym  $\sphericalangle ABD = 90^\circ$  oraz  $\sphericalangle CBD = 45^\circ$ . Punkt  $E$  leży na odcinku  $AD$ , przy czym  $BC = CE$ . Wyznacz miarę kąta  $BCE$ .

4. Wyznacz wszystkie trójki  $(a, b, c)$  liczb całkowitych różnych od 0, dla których

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) = (1 + a)(1 + b)(1 + c).$$

5. W tabeli przedstawionej na rysunku Zosia poprzedziła osiem liczb znakami minus, zmieniając je na liczby przeciwne. Okazało się, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znalazły się dokładnie dwie liczby ujemne. Udowodnij, że po tej zmianie suma wszystkich szesnastu liczb w tabeli jest równa 0.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16