Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów — poziom OMJ

Matematyczna
Olimpiada
Juniorów
www.omj.edu.pl

Konkurs Zadaniowy

28 czerwca – 2 lipca 2021

Wstęp

Konkurs Zadaniowy stanowił nieobowiązkową aktywność popołudniową podczas zdalnego Obozu Naukowego OMJ. Złożony był z 5 serii po trzy zadania każda, przy czym na rozwiązywanie każdej serii przewidziane były po 3 godziny. Prace uczestników Obozu oceniane były w skali olimpijskiej 0, 2, 5, 6. Trzy najwyższe uzyskane sumy punktów to 74, 66 oraz 61. Rozkład ocen przyznanych za rozwiązania zadań przedstawiony jest w poniższej tabeli.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
6 p.	8	6	0	6	1	3	9	6	5	10	2	7	6	5	2
5 p.	0	1	0	2	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0
2 p.	1	2	0	4	0	1	1	2	2	0	2	1	1	0	0
0 p.	0	2	6	0	0	2	0	0	1	0	2	0	1	0	3

W niniejszym opracowaniu zgromadzone są wszystkie zadania konkursowe wraz z rozwiązaniami. Zachęcamy do wykorzystania tych materiałów w przygotowaniach do startów w kolejnych edycjach Olimpiady Matematycznej Juniorów. Miłej lektury!

Kadra Obozu

Uczestnicy Obozu Naukowego OMJ (poziom OMJ)

Uczniowie: Szymon Anders, Błażej Dratwa, Łukasz Ganczarek, Zuzanna Gierej, Nina Kicińska, Alexey Koshevoy, Ignacy Kus, Oliwier Kwiatkowski, Aleksander Maliszewski, Antoni Mazur, Filip Mężykowski, Jan Nasieniewski, Tymon Nowakowski, Aleksander Olszewski, Mateusz Pawlata, Stanisław Pekrul, Tadeusz Rylski, Szymon Urban, Szymon Wróblewski.

Kadra: Tomasz Szymczyk (kierownik), Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Mateusz Dębowski, Paweł Gadziński, Arkadiusz Męcel, Waldemar Pompe, Bartłomiej Zawalski, Radosław Żak.

Treści zadań

Zadanie 1.

Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkt O leży na przekątnej BD, wewnątrz trójkąta ACD. Udowodnij, że

$$[OAB] = [OAC] + [OAD],$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb rzeczywistych a, b, dla których spełniona jest równość

$$\sqrt{a+2} + \sqrt{b+2} = \sqrt{a+b} + 2.$$

Zadanie 3.

Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczby 16^n i $16^n + 2^n$ mają tyle samo cyfr w zapisie dziesiętnym.

Zadanie 4.

Edward chce zasadzić w rzędzie 20 drzew — lipy i klony. Chce to zrobić tak, aby liczba drzew między każdymi dwoma klonami była różna od 3. Ile co najwyżej klonów może zasadzić Edward?

Zadanie 5.

Wykaż, że jeśli czworokąt wypukły ma prostopadłe przekątne, to rzuty prostokątne środków jego boków na proste zawierające przeciwległe boki leżą na jednym okręgu.

Zadanie 6.

Wykaż, że jeśli liczby rzeczywiste x, y spełniają równość $xy = 1$, to

$$x^2 + y^2 \geqslant 2\sqrt{2}(x - y).$$

Zadanie 7.

Dodatnią liczbę całkowitą nazwiemy *piękną*, jeśli można ją przedstawić w postaci iloczynu dwóch różnych liczb pierwszych. Wyznacz największą liczbę całkowitą n o tej własności, że istnieje n kolejnych dodatnich liczb całkowitych, z których każda jest piękna.

Zadanie 8.

W tabeli o wymiarach 3×7 każde pole jest białe albo czerwone. Udowodnij, że można tak wybrać dwa wiersze i dwie kolumny tej tabeli, że cztery pola znajdujące się na ich przecięciach mają ten sam kolor.

Zadanie 9.

Dany jest dziesięciokąt foremny $ABCDEFGHIJ$. Wykaż, że $AB + \frac{1}{2}AF = AD$.

Zadanie 10.

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} < \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}.$$

Zadanie 11.

Udowodnij, że spośród dowolnych 16 liczb całkowitych można wybrać takie trzy liczby a, b, c, że liczba $a(b-c)$ jest podzielna przez 30.

Zadanie 12.

Początkowo w rzędzie ułożona jest nieparzysta liczba monet. Każda z nich z jednej strony ma orła, a z drugiej — reszkę. *Ruch* polega na wybraniu dwóch sąsiednich monet i odwróceniu każdej z nich na drugą stronę. Wykonując kolejno ruchy chcemy doprowadzić do sytuacji, w której wszystkie monety leżą tą samą stroną do góry. Czy zawsze (niezależnie od początkowego ustawienia monet) można osiągnąć taką sytuację? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 13.

Dane są liczby rzeczywiste $a \geqslant 1$, $b \geqslant 2$, $c \geqslant 3$. Wykaż, że $abc \geqslant a + b + c$.

Zadanie 14.

Na bokach BC i AC trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie prostokąty $BCDE$ i $ACHG$, przy czym $AC = CD$ i $BC = CH$. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Wykaż, że $2 \cdot CM = DH$.

Zadanie 15.

Wyznacz liczbę podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, w których suma elementów jest równa co najmniej 28.

Rozwiązania zadań

Zadanie 1.

Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkt O leży na przekątnej BD, wewnątrz trójkąta ACD. Udowodnij, że

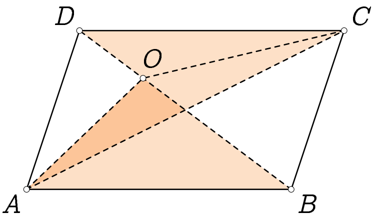
$$[OAB] = [OAC] + [OAD],$$

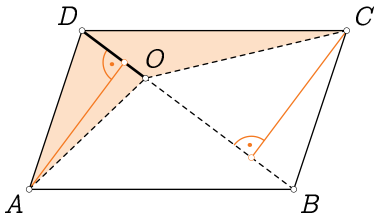
gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że $[ABD] = \frac{1}{2}[ABCD] = [ACD]$, wobec czego

$$[OAB] = [ABD] - [OAD] = [ACD] - [OAD] = [OAC] + [OCD].$$

Ponadto $[OCD] = [OAD]$, gdyż trójkąty te mają wspólną podstawę OD oraz równe wysokości opuszczone na tę podstawę (punkty A i C są jednakowo oddalone od przekątnej BD).





Uwaga: W ostatniej części rozwiązania wykorzystaliśmy następujący ogólny i przydatny fakt: *Jeśli punkty X i Y leżą po przeciwnych stronach prostej AB, to pola trójkątów ABX i ABY są równe wtedy i tylko wtedy, gdy środek odcinka XY leży na prostej AB.*

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb rzeczywistych a, b, dla których spełniona jest równość

$$\sqrt{a+2} + \sqrt{b+2} = \sqrt{a+b} + 2.$$

Rozwiązanie: Podnosząc daną równość stronami do kwadratu, upraszczając i znów podnosząc stronami do kwadratu, otrzymujemy kolejno

$$a + 2 + 2\sqrt{(a+2)(b+2)} + b + 2 = a + b + 4\sqrt{a+b} + 4,$$
$$\sqrt{(a+2)(b+2)} = 2\sqrt{a+b},$$
$$(a+2)(b+2) = 4(a+b).$$

Ostatnią równość można z kolei przekształcić równoważnie do postaci

$$\begin{aligned} ab + 2a + 2b + 4 &= 4a + 4b, \\ ab - 2a - 2b + 4 &= 0, \\ (a-2)(b-2) &= 0, \end{aligned}$$

z której uzyskujemy $(a, b) = (2, t)$ lub $(a, b) = (t, 2)$ dla pewnego $t > 0$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że znalezione pary spełniają wyjściowe równanie.

Zadanie 3.

Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczby 16^n i $16^n + 2^n$ mają tyle samo cyfr w zapisie dziesiętnym.

Rozwiązanie: Przypuśćmy, że dane liczby mają różne liczby cyfr, tzn.

$$16^n < 10^m \leqslant 16^n + 2^n$$

dla pewnej liczby naturalnej m — powyższe nierówności oznaczają, że liczba 16^n ma co najwyżej m cyfr, a liczba $16^n + 2^n$ ma więcej niż m cyfr. Zauważmy, że skoro $10^m > 16^n > 10^n$, to $m > n$. Po podzieleniu powyższych nierówności przez 2^n, uzyskujemy

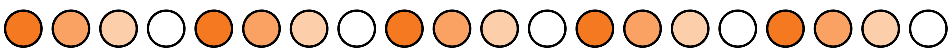
$$8^n < 2^{m-n} \cdot 5^m \leqslant 8^n + 1,$$

czyli $2^{m-n} \cdot 5^m = 8^n + 1$. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż lewa strona tej równości jest liczbą parzystą, a prawa — nieparzystą.

Zadanie 4.

Edward chce zasadzić w rzędzie 20 drzew — lipy i klony. Chce to zrobić tak, aby liczba drzew między każdymi dwoma klonami była różna od 3. Ile co najwyżej klonów może zasadzić Edward?

Rozwiązanie: Pokolorujmy miejsca na drzewa czterema kolorami w sposób przedstawiony na rysunku, czyli tak, aby między kolejnymi pozycjami w tym samym kolorze liczba drzew była równa 3.

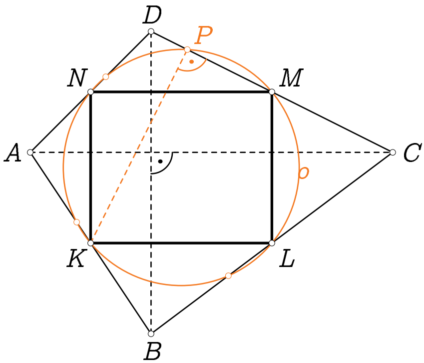


Zauważmy, że na pięciu miejscach tego samego koloru można posadzić co najwyżej trzy klony (w przeciwnym razie między pewnymi dwoma klonami znalazłyby się dokładnie trzy drzewa). W związku z tym łącznie Edward może posadzić co najwyżej $4 \cdot 3 = 12$ klonów. Poniższy obrazek ilustruje sposób sadzenia 12 klonów zgodnie z warunkami zadania (litery K oznaczają klony, a litery L — lipy).

Zadanie 5.

Wykaż, że jeśli czworokąt wypukły ma prostopadłe przekątne, to rzuty prostokątne środków jego boków na proste zawierające przeciwległe boki leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie: Oznaczmy dany czworokąt przez $ABCD$, a środki boków AB, BC, CD, DA odpowiednio przez K, L, M, N. Wówczas $KL \parallel AC$, gdyż KL jest linią środkową trójkąta ABC. Podobnie uzasadniamy, że $MN \parallel AC$, $LM \parallel BD$ oraz $NK \parallel BD$, skąd wynika, że czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem. Ponadto na mocy założenia $AC \perp BD$ otrzymujemy, że czworokąt $KLMN$ jest prostokątem.



Oznaczmy okrąg opisany na prostokącie $KLMN$ przez o. Wykażemy, że rzuty punktów K, L, M, N na przeciwległe boki czworokąta $ABCD$ leżą na okręgu o, skąd wyniknie teza zadania. Dowód zaprezentujemy dla rzutu punktu K na bok CD — w pozostałych przypadkach rozumowanie jest w pełni analogiczne.

Niech P będzie rzutem prostokątnym punktu K na prostą CD. Jeśli punkt P pokrywa się z punktem M, to oczywiście leży na okręgu o. Z kolei jeśli punkt P jest różny od M, to kąt KPM jest prosty, wobec czego punkt P leży na okręgu o średnicy KM, czyli na okręgu o.

Zadanie 6.

Wykaż, że jeśli liczby rzeczywiste x, y spełniają równość $xy = 1$, to

$$x^2 + y^2 \geqslant 2\sqrt{2}(x - y).$$

Rozwiązanie: Sposób I

Korzystając dwukrotnie z tożsamości

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$$

oraz uwzględniając założenie $xy = 1$, uzyskujemy

$$x^2+y^2 = (x-y)^2+2xy = (x-y)^2+2 = (x-y)^2+(\sqrt{2})^2 = (x-y-\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}(x-y)$$

i wobec tego

$$x^2 + y^2 = (x - y - \sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}(x - y) \geqslant 2\sqrt{2}(x - y),$$

gdyż kwadrat liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną.

Sposób II

Przyjmijmy $t = x - y = x - \frac{1}{x}$. Wówczas

$$t^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + y^2 - 2.$$

Dowodzona nierówność przybiera więc postać

$$t^2 + 2 \geqslant 2\sqrt{2}t, \quad \text{czyli} \quad \left(t - \sqrt{2}\right)^2 \geqslant 0,$$

co kończy rozwiązanie.

Uwaga: Równość w udowodnionej nierówności jest spełniona, gdy $x = y + \sqrt{2}$, co wobec $xy = 1$ oznacza, że

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{lub} \quad (x, y) = \left(\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right).$$

Zadanie 7.

Dodatnią liczbę całkowitą nazwiemy *piękną*, jeśli można ją przedstawić w postaci iloczynu dwóch różnych liczb pierwszych. Wyznacz największą liczbę całkowitą n o tej własności, że istnieje n kolejnych dodatnich liczb całkowitych, z których każda jest piękna.

Rozwiązanie: Zauważmy, że pośród dowolnych czterech kolejnych liczb całkowitych znajduje się liczba podzielna przez 4. Taka liczba nie jest iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych, gdyż w jej rozkładzie na czynniki pierwsze występują co najmniej dwie dwójki. Wynika z tego, że $n < 4$.

Z drugiej strony, istnieją trójki kolejnych liczb całkowitych, z których każda jest iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych — np. $33 = 3 \cdot 11$, $34 = 2 \cdot 17$, $35 = 5 \cdot 7$. To oznacza, że szukana największa wartość to $n = 3$.

Zadanie 8.

W tabeli o wymiarach 3×7 każde pole jest białe albo czerwone. Udowodnij, że można tak wybrać dwa wiersze i dwie kolumny tej tabeli, że cztery pola znajdujące się na ich przecięciach mają ten sam kolor.

Rozwiązanie: Przypuśćmy, że tabela ma 7 kolumn (i 3 wiersze).

Zauważmy, że każda kolumna zawiera co najmniej dwa pola tego samego koloru — nazwijmy ten kolor *dominującym*. Zasłońmy w każdej kolumnie jedno pole w taki sposób, aby widoczne zostały tylko dwa pola w dominującym kolorze.

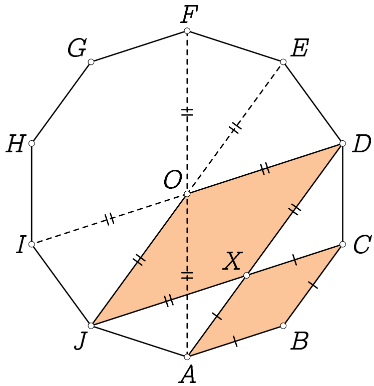
			Z	Z		
Z					Z	Z
	Z	Z				

Skoro jest 7 kolumn, to pewien kolor dominuje w co najmniej 4 z nich. Rozważmy 4 kolumny o tym samym kolorze dominującym. Skoro są 3 wiersze, to pewne dwie z rozważanych kolumn mają zasłonięte pola w tym samym wierszu. Cztery pola na przecięciu tych kolumn i dwóch pozostałych wierszy mają wszystkie ten sam kolor.

Zadanie 9.

Dany jest dziesięciokąt foremny $ABCDEFGHIJ$. Wykaż, że $AB + \frac{1}{2}AF = AD$.

Rozwiązanie: Oznaczmy przez O środek symetrii danego dziesięciokąta, czyli środek odcinka AF, a przez X — punkt przecięcia przekątnych AD i CJ. Każdy z odcinków łączących punkt O z wierzchołkiem danego dziesięciokąta ma długość $\frac{1}{2}AF$.



Ponieważ dziesięciokąt jest foremny, więc proste BC, AD, JE są równoległe oraz podobnie proste AB, JC, ID są równoległe. Stąd wniosek, że czworokąty $ABCX$ oraz $XDOJ$ to równoległoboki, a ponieważ $AB = BC$ oraz $OD = OJ$, więc są to romby. Wobec tego

$$AD = AX + XD = AB + OD = AB + \tfrac{1}{2}AF.$$

Zadanie 10.

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} < \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}.$$

Rozwiązanie: Sposób I

Odejmując od obu stron postulowanej nierówności liczbę $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$, otrzymamy równoważną nierówność

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Zauważmy, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej $i < n$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{n+i}.$$

Stąd mamy

$$\frac{1}{2} = n \cdot \frac{1}{2n} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n},$$

co było do wykazania.

Sposób II

Mamy dla dowolnego $k = 2, 3, \ldots, n$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} < \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k}.$$

Po zsumowaniu tych nierówności otrzymujemy tezę zadania.

Zadanie 11.

Udowodnij, że spośród dowolnych 16 liczb całkowitych można wybrać takie trzy liczby a, b, c, że liczba $a(b-c)$ jest podzielna przez 30.

Rozwiązanie: Jeśli wśród pewnych 16 liczb jest liczba podzielna przez 15, to wystarczy wziąć ją jako a, a jako b i c — dowolne dwie z pozostałych liczb, które są tej samej parzystości (tzn. obie parzyste lub obie nieparzyste). Wówczas $a(b-c)$ jest liczbą podzielną przez 30.

W przeciwnym razie wśród tych 16 liczb pojawiają się wyłącznie liczby niepodzielne przez 15. Jeśli wśród nich jest liczba parzysta, to wybierzmy dowolną taką liczbę jako a. Pośród pozostałych 15 liczb pewne dwie dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 15 (bo żadna nie jest podzielna przez 15) — wybierzmy je jako b i c. Wówczas $a(b-c)$ jest liczbą podzielną przez 30.

Pozostał do rozważenia przypadek, w którym wszystkie 16 liczb to liczby nieparzyste (i niepodzielne przez 15). To oznacza, że liczby te dają przy dzieleniu przez 30 nieparzystą resztę (różną od 15) — możliwych reszt jest więc 14, skąd wniosek, że pewne dwie liczby dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 30. Wystarczy wziąć je za b i c, a liczbę a dobrać dowolnie — wówczas $a(b-c)$ jest liczbą podzielną przez 30.

Zadanie 12.

Początkowo w rzędzie ułożona jest nieparzysta liczba monet. Każda z nich z jednej strony ma orła, a z drugiej — reszkę. *Ruch* polega na wybraniu dwóch sąsiednich monet i odwróceniu każdej z nich na drugą stronę. Wykonując kolejno ruchy chcemy doprowadzić do sytuacji, w której wszystkie monety leżą tą samą stroną do góry. Czy zawsze (niezależnie od początkowego ustawienia monet) można osiągnąć taką sytuację? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie: Udowodnimy, że zawsze można doprowadzić do opisanej sytuacji.

Przypuśćmy, że początkowo nieparzysta liczba monet pokazuje orła, a parzysta — reszkę (rozumowanie w przeciwnym przypadku jest w pełni analogiczne, wystarczy zamienić role orła i reszki). Jeśli wszystkie monety pokazują orła, to nie trzeba wykonywać ani jednego ruchu. Załóżmy, że co najmniej jedna moneta pokazuje reszkę.

Ponumerujmy monety w rzędzie kolejno od 1 do n i niech i oznacza najmniejszy numer monety pokazującej reszkę. Zauważmy, że $i \neq n$, gdyż liczba monet pokazujących reszkę jest parzysta. Wykonując ruch z użyciem monet o numerach i oraz $i+1$ doprowadzamy do sytuacji, w której liczba reszek nie ulega zmianie lub zmniejsza się o dwa — pozostaje więc parzysta. Jeśli wciąż pewne monety pokazują reszkę, to najmniejszy numer monety pokazującej reszkę jest teraz większy od i.

Powtarzając wielokrotnie opisany wyżej ruch (odwracający pierwszą reszkę od lewej oraz następną monetę) ostatecznie dojdziemy do sytuacji, w której wszystkie monety pokazują orła.

Uwaga: Przeprowadzone rozumowanie pokazuje, że do uzyskania żądanej konfiguracji wystarczy ciąg co najwyżej $n-1$ ruchów. Okazuje się, że czasem tylu właśnie ruchów potrzeba — świadczy o tym przykład, w którym tylko pierwsza i ostatnia moneta pokazują reszkę (a wszystkie pozostałe — orła).

Zadanie 13.

Dane są liczby rzeczywiste $a \geqslant 1$, $b \geqslant 2$, $c \geqslant 3$. Wykaż, że $abc \geqslant a+b+c$.

Rozwiązanie: Sposób I

Z danych nierówności wynika, że $\frac{1}{a} \leqslant 1$, $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{2}$, $\frac{1}{c} \leqslant \frac{1}{3}$, skąd uzyskujemy

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leqslant 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = 1.$$

Mnożąc powyższą nierówność stronami przez liczbę dodatnią abc, uzyskujemy tezę.

Sposób II

Wykorzystując założenia $a \geqslant 1$, $b \geqslant 2$, $c \geqslant 3$, mamy kolejno

$$
\begin{aligned}
abc - a - b - c = a(bc-1) - b - c &\geqslant \\
\geqslant \quad bc - 1 \quad - b - c = b(c-1) - c - 1 &\geqslant \\
\geqslant 2(c-1) - c - 1 = c - 3 &\geqslant \\
\geqslant 3 - 3 = 0&,
\end{aligned}
$$

skąd $abc \geqslant a + b + c$.

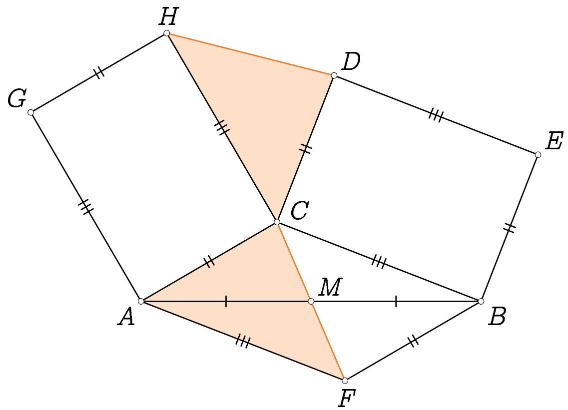
Zadanie 14.

Na bokach BC i AC trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie prostokąty $BCDE$ i $ACHG$, przy czym $AC = CD$ i $BC = CH$. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Wykaż, że $2 \cdot CM = DH$.

Rozwiązanie: Niech F będzie takim punktem, że czworokąt $AFBC$ jest równoległobokiem. Wówczas $AC = CD$, $AF = BC = CH$ oraz

$$\sphericalangle DCH = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \sphericalangle ACB = 180^\circ - \sphericalangle ACB = \sphericalangle CAF,$$

skąd wniosek, że trójkąty ACF oraz CDH są przystające (cecha bok–kąt–bok). W związku z tym $DH = CF = 2 \cdot CM$, co było do udowodnienia.



Zadanie 15.

Wyznacz liczbę podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, w których suma elementów jest równa co najmniej 28.

Rozwiązanie: Niech A będzie dowolnym podzbiorem danego zbioru liczb, a B — podzbiorem złożonym z wszystkich pozostałych elementów. Oznaczmy przez a i b sumy elementów odpowiednio w A i B. Wówczas skoro A i B łącznie wyczerpują cały dany zbiór, to

$$a + b = 1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55,$$

skąd wniosek, że $a \geqslant 28$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b = 55 - a \leqslant 27$. Innymi słowy: pośród zbiorów A i B dokładnie jeden spełnia warunek zadania.

To oznacza, że dla każdego podziału danego zbioru na dwa podzbiory, dokładnie jeden z nich spełnia warunki zadania. Ostatecznie więc dokładnie połowa wszystkich podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ ma sumę elementów równą co najmniej 28. Pozostaje zauważyć, że wszystkich podzbiorów jest 2^{10}, więc odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie to $\frac{1}{2} \cdot 2^{10} = 512$.