STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ JUNIORÓW

Obóz Naukowy OMJ

Poziom OMJ

2018 rok

Olimpiada Matematyczna Juniorów

www.omj.edu.pl

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Obóz Naukowy OMJ (poziom OMJ)

Obóz Naukowy OMJ (poziom OMJ) odbył się w dniach 3 – 9 czerwca 2018 r. w Szczyrku.

Przez pierwsze cztery dni obozu rozegrane zostały zawody indywidualne, w których uczestnicy rozwiązywali 25 zadań (punktowanych w skali 0, 2, 5, 6). Trzy największe uzyskane sumy punktów to 128, 123 i 112 punktów (na 150 możliwych). Piątego dnia odbył się mecz matematyczny, w którym do rozwiązania było 11 zadań.

Niniejszy plik zawiera treści wszystkich zadań oraz wskazówki do rozwiązań.

Kadra obozu

Jerzy Bednarczuk
Łukasz Bożyk
Jadwiga Czyżewska
Natalia Kucharczuk
Weronika Lorenczyk
Tomasz Szymczyk
Jarosław Wróblewski

Uczestnicy

Kalina Białek
Bartłomiej Bychawski
Marcel Chwiałkowski
Ignacy Gębuś
Bartosz Głowacki
Marianna Gołębiewska
Andrzej Gwiazda
Igor Klimczak
Piotr Kuc
Piotr Łaba
Korneliusz Obarski
Kacper Paciorek
Tomasz Puczel
Karolina Radzio
Patryk Rogalski
Jakub Słowikowski
Konstanty Smolira
Emilia Wiśniewska
Linda Wnętrzewska
Artur Wojtuszkiewicz

Zestawienie ocen z zawodów indywidualnych

	1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**
6	13	3	10	4	4	3	14	2	1	11	5	0	11
5	2	2	0	1	4	1	4	0	0	1	6	0	1
2	0	0	3	1	0	4	0	0	0	0	2	0	3
0	5	15	7	14	12	12	2	18	19	8	7	20	5

	14.	**15.**	**16.**	**17.**	**18.**	**19.**	**20.**	**21.**	**22.**	**23.**	**24.**	**25.**
6	10	2	19	13	16	16	13	16	17	9	10	0
5	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	2	0
2	1	0	1	1	1	2	1	0	1	3	3	0
0	8	18	0	6	2	1	6	4	2	8	5	20

Treści zadań

Pierwsze zawody indywidualne

1. Odcinki AC i BD przecinają się w punkcie P. Wykaż, że

$$\sqrt{[ABCD]} \geqslant \sqrt{[ABP]} + \sqrt{[CDP]},$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

2. Kwadrat o boku 150 podzielono na prostokąty o wymiarach 1×20 oraz kwadraty jednostkowe. Wykaż, że kwadratów jednostkowych jest co najmniej 100.

3. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkt E leży na półprostej $AC^{\rightarrow}$ i spełnia warunek $BE \parallel AD$. Punkt F leży na półprostej $BD^{\rightarrow}$ i spełnia warunek $AF \parallel BC$. Udowodnij, że $EF \parallel CD$.

4. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$3xy\left(x^4 + y^4\right) \leqslant 2 \cdot \left(x^6 + x^3y^3 + y^6\right).$$

5. Dana jest liczba pierwsza p o następujących własnościach:

- istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b niepodzielne przez p, że liczba $a^3 + 2b^3$ jest podzielna przez p;
- istnieją takie dodatnie liczby całkowite c, d niepodzielne przez p, że liczba $c^3 + 3d^3$ jest podzielna przez p;
- istnieją takie dodatnie liczby całkowite e, f niepodzielne przez p, że liczba $e^3 + 5f^3$ jest podzielna przez p.

Udowodnij, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite m, n niepodzielne przez p, że liczba $m^3 + 30n^3$ jest podzielna przez p.

Drugie zawody indywidualne

6. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 90°$. Punkt A_1 leży na boku AB, a punkt A_2 na boku BC, przy czym $AC = AA_1$ oraz $BA_1 = BA_2$. Punkt B_1 leży na boku AB, a punkt B_2 na boku AC, przy czym $BC = BB_1$ oraz $AB_1 = AB_2$. Punkt M jest środkiem odcinka A_2B_2. Wyznacz miarę kąta A_1MB_1.

7. Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze p, że liczby

$$p^2 + 4 \quad \text{oraz} \quad p^2 + 6$$

są pierwsze.

8. Dana jest taka liczba rzeczywista a, że równanie
$$x^3-6x^2+9x=a$$
ma trzy rozwiązania w liczbach rzeczywistych. Wyznacz, w zależności od a, sumę kwadratów tych trzech rozwiązań.

9. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym bok AB jest najkrótszy. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach AC i BC, przy czym
$$AB=AC-BL=BC-AK.$$
Niech M będzie takim punktem wnętrza trójkąta ABC, że
$$\sphericalangle MKC=\tfrac{1}{2}\sphericalangle BAC \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle MLC=\tfrac{1}{2}\sphericalangle ABC.$$
Udowodnij, że proste AB i CM są prostopadłe.

10. Każdy punkt kratowy na płaszczyźnie pomalowano na zielono albo czerwono, przy czym każdy z tych dwóch kolorów został użyty do pomalowania co najmniej jednego punktu. Udowodnij, że istnieją dwa punkty odległe o 5 pomalowane różnymi kolorami.

Uwaga. Punkt kratowy to punkt o obu współrzędnych całkowitych.

Trzecie zawody indywidualne

11. Udowodnij, że punkty płaszczyzny można tak pokolorować dziewięcioma kolorami, aby żadne dwa punkty odległe o 1 nie były tego samego koloru.

12. Punkt P leży na boku AB trójkąta ABC. Wykaż, że prosta symetryczna do prostej CP względem prostej przechodzącej przez środki okręgów wpisanych w trójkąty ACP i BCP przechodzi przez pewien punkt niezależny od położenia punktu P.

13. Dana jest liczba naturalna $k>1$ oraz liczby pierwsze p_1, p_2, ..., p_k, q większe od 3 spełniające warunek
$$p_1^2+p_2^2+\ldots+p_k^2=q^2\,.$$
Udowodnij, że $k>24$.

14. Dana jest liczba naturalna $k>1$ oraz liczby pierwsze p_1, p_2, ..., p_k, q większe od 5 spełniające warunek
$$p_1^4+p_2^4+\ldots+p_k^4=q^4\,.$$
Udowodnij, że $k>240$.

15. Liczby rzeczywiste x_1, x_2, ..., x_{90} spełniają równości
$$x_1+x_2+\ldots+x_{90}=0, \qquad x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{90}^2=90, \qquad x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{90}^4=90.$$
Wyznacz wszystkie możliwe wartości sumy $x_1^3+x_2^3+\ldots+x_{90}^3$.

Czwarte zawody indywidualne

16. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$4\cdot(a+b+c)\leqslant a^2+b^2+c^2+12.$$

17. W Wislandii jest 5 miast. Dwa największe miasta mają połączenie drogowe i kolejowe. Każda inna para miast ma połączenie tylko jednego rodzaju: drogowe albo kolejowe. Wykaż, że istnieją trzy miasta, z których między każdymi dwoma istnieje połączenie tego samego rodzaju.

18. Odcinek CD jest wysokością trójkąta ostrokątnego ABC. Punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na boki AC i BC, a punkty M i N są środkami odpowiednio boków AC i BC. Wykaż, że punkty E, F, M, N leżą na jednym okręgu.

19. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n>1$ liczba 14^n-9 jest złożona.

20. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba 47^n+122 jest złożona.

Piąte zawody indywidualne

21. Na tablicy napisano plusy i minusy. W jednym ruchu wymazujemy dwa znaki: jeśli są takie same, to zamiast nich na tablicy piszemy $+$, a jeśli nie, to piszemy $-$. Ruchy wykonujemy dowolnie, aż zostanie jeden znak. Udowodnij, że nie zależy on od kolejności wymazywania znaków.

22. Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d, że

$$a+b=c+d \quad \text{oraz} \quad a^3+b^3=c^3+d^3.$$

Udowodnij, że $a^5+b^5=c^5+d^5$.

23. Dany jest różnoboczny trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB=60^\circ$. Wykaż, że proste zawierające wysokości tego trójkąta opuszczone z wierzchołków A i B oraz symetralne boków AC i BC wyznaczają pewien romb.

24. Udowodnij, że równanie

$$3a^2+b^2=5c^2$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c.

25. Udowodnij, że równanie

$$4a^4+b^4+c^4=d^4$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c, d spełniających warunek $\mathrm{NWD}(a,b,c,d)=1$.

Mecz matematyczny

26. Na wyspie Kombinatorion znajdują się 72 palmy, wyznaczające wierzchołki wielokąta foremnego. Na początku na jednej z nich siedzą 72 małpy. Jeżeli na jakimś drzewie siedzą co najmniej dwie małpy, to mogą przeskoczyć: jedna na sąsiednie drzewo po lewej, a druga na sąsiednie po prawej. Czy możliwe jest, aby w pewnym momencie na każdej palmie siedziała dokładnie jedna małpa?

27. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt H jest ortocentrum, a punkt K jest środkiem odcinka CH. Punkty A' i B' są symetryczne odpowiednio do punktów A i B względem punktu K. Punkty M i N są środkami odpowiednio boków AC i BC. Udowodnij, że proste $A'N$ i $B'M$ przecinają się na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

28. Trzynaście wierzchołków 77-kąta foremnego pomalowano na czerwono. Udowodnij, że pewne cztery czerwone punkty są wierzchołkami trapezu.

29. Liczbami *trójkątnymi* nazywamy liczby $T_n = 1+2+\ldots+n$. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb trójkątnych, których dwukrotność też jest liczbą trójkątną.

30. W ostrokątnym trójkącie ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego ω, odcinek CL jest dwusieczną kąta ACB, a prosta prostopadła do AB, przechodząca przez punkt C przecina okrąg ω po raz drugi w punkcie D. Wykaż, że jeśli $\sphericalangle ACB = 60^\circ$, to punkty C, O, L, D leżą na jednym okręgu.

31. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, spełniających warunek $a+b+c=1$, zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2+3a}+\frac{1}{2+3b}+\frac{1}{2+3c}\geqslant 1.$$

32. Wyznacz największą możliwą wartość sumy

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_{64}b_{64},$$

gdzie dodatnie liczby rzeczywiste a_1, b_1, a_2, b_2, $\ldots$, a_{64}, b_{64} spełniają warunki

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_{64}^2=b_1^3+b_2^3+b_3^3+\ldots+b_{64}^3=1.$$

33. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Punkty K, L, M, N są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ABC, BCD, CDA, DAB. Udowodnij, że czworokąt $KLMN$ jest prostokątem.

34. Na tablicy napisano kolejne liczby całkowite od 1 do 24. W jednym ruchu możemy wymazać dowolne dwie liczby x i y, a zamiast nich napisać liczby

$$\frac{3x+4y}{5} \quad \text{oraz} \quad \frac{4x-3y}{5}.$$

Udowodnij, że na tablicy nie może się pojawić liczba większa od 70.

35. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba n^n-13 jest podzielna przez p.

36. W trójkącie prostokątnym ABC o kącie prostym przy wierzchołku C poprowadzono wysokość CD. Odległość między środkami okręgów wpisanych w trójkąty ACD i BCD jest równa 1. Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Wskazówki

Pierwsze zawody indywidualne

1. Zapisz tezę zadania przy pomocy pól trójkątów ABP, BCP, CDP, DAP i skorzystaj z $[ABP]\cdot[CDP]=[ADP]\cdot[BCP]$.

2. Pokoloruj planszę w szachownicę o polach 10×10. Zauważ, że pól jednego koloru jest o 100 więcej niż drugiego.

3. Oznacz przez P punkt przecięcia odcinków AC i BD i korzystając z twierdzenia Talesa uzasadnij, że

$$\frac{AP}{PE}=\frac{DP}{PB} \quad\text{oraz}\quad \frac{BP}{PF}=\frac{CP}{PA}.$$

4. Wykaż, że

$$3x^5y\leqslant 2x^6+x^3y^3, \quad 3xy^5\leqslant 2y^6+x^3y^3.$$

5. Przyjmij $m=ace$ oraz $n=bdf$.

Drugie zawody indywidualne

6. Udowodnij, że punkty A_1, A_2, B_1, B_2 leżą na okręgu o środku w punkcie M.

7. *Odpowiedź:* $p=5$.

Uzasadnij, że jedna z liczb p, p^2+4, p^2+6 jest podzielna przez 5.

8. *Odpowiedź:* 18.

Niech x_1, x_2, x_3 będą rozwiązaniami danego równania. Uzasadnij, że $x_1+x_2+x_3=6$ i $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=9$.

9. Oznacz punkty przecięcia AB z KM i LM odpowiednio przez P i Q. Wykaż, że punkt M jest ortocentrum trójkąta PCQ.

10. Przeprowadź rozumowanie nie wprost i uzasadnij, że wtedy każde dwa punkty odległe o 1 mają ten sam kolor.

Trzecie zawody indywidualne

11. Rozważ kolorowanie płaszczyzny *w kratkę*, której każde pole ma przekątną równą 1.

12. Oznacz punkty przecięcia danej prostej z bokiem AB i odcinkiem CP odpowiednio przez D i E. Skorzystaj z warunku wpisywalności okręgów w czworokąty $ACDE$ i $BCDE$ i uzasadnij, że D to szukany punkt niezależny od położenia punktu P.

13. Zbadaj jakie reszty przy dzieleniu przez 3 i 8 dają kwadraty liczb nieparzystych.

14. Zbadaj jakie reszty przy dzieleniu przez 3, 5 i 16 dają czwarte potęgi liczb nieparzystych.

15. Rozważ sumę

$$(x_1^4-2x_1^2+1)+\ldots+(x_{90}^4-2x_{90}^2+1).$$

Czwarte zawody indywidualne

16. Udowodnij, że $4x\leqslant x^2+4$ i zastosuj tę nierówność dla $x=a$, $x=b$, $x=c$.

17. Zauważ, że z jednego z dwóch największych miast wychodzą trzy połączenia tego samego rodzaju.

18. Zauważ, że na czworokącie $CEDF$ można opisać okrąg. Następnie udowodnij, że

$$\sphericalangle CMN=\sphericalangle CAD=\sphericalangle CDE=\sphericalangle CFE.$$

19. Rozważ dwa przypadki w zależności od parzystości liczby n.

20. Rozpatrz cztery przypadki w zależności od reszty z dzielenia liczby n przez 4. W każdym z nich znajdź liczbę pierwszą, która dzieli dane wyrażenie.

Piąte zawody indywidualne

21. Zauważ, że niezależnie od wykonywanych ruchów parzystość liczby minusów się nie zmienia.

22. Uzasadnij, że

$$ab=cd \quad\text{oraz}\quad a^2+b^2=c^2+d^2.$$

23. Oznacz przez M i N odpowiednio środki odcinków AC i BC, a przez D i E spodki wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A i B. Wykaż, że $EM=DN$.

24. Załóż nie wprost, że równanie ma rozwiązanie i uzasadnij, że liczby a i b są podzielne przez 5. Rozważ największą potęgę liczby 5, która dzieli lewą i prawą stronę danego równania.

25. Przyjmij, że $c=n-1$ oraz $d=n+1$ dla pewnego n i dobierz odpowiednie wartości a, b (na przykład biorąc $n=2m^4$ dla pewnego m).

Mecz matematyczny

26. *Odpowiedź:* Nie.

Ponumeruj palmy kolejnymi liczbami od 1 do 72. Zauważ, że suma numerów palm zajmowanych przez małpy daje stałą resztę przy dzieleniu przez 8.

27. Wykaż, że punkt symetryczny do A' względem N leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

28. Czerwone punkty wyznaczają $\binom{13}{2}=78$ odcinków. Uzasadnij, że dwa z nich są równoległe.

29. Przepisz $2T_n=T_m$ jako

$$(2m+1)^2-2(2n+1)^2=-1$$

i skorzystaj z faktu, że równanie $a^2-2b^2=-1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach nieparzystych a, b.

30. Wykaż, że $BO=BH$ i $\sphericalangle OBL=\sphericalangle LBH$, a następnie skorzystaj z faktu, że w trójkącie dwusieczna kąta wewnętrznego i symetralna przeciwległego boku przecinają się na okręgu opisanym.

31. Skorzystaj z nierówności między średnimi arytmetyczną i harmoniczną.

32. *Odpowiedź:* 2.

Uzasadnij, że $3a_ib_i \leqslant 3a_i^2+2b_i^3+1/64$.

33. Skorzystaj z lematu o trójliściu (zadanie 7. z artykułu „Bliźniacze zadania”, Gazetka OMJ *Kwadrat* nr 16, lipiec 2015).

34. Zauważ, że suma kwadratów liczb znajdujących się na tablicy jest stała.

35. Zauważ, że na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieje takie n, że

$$p \mid n-13 \quad \text{oraz} \quad p-1 \mid n-1.$$

Następnie skorzystaj z małego twierdzenia Fermata.

36. *Odpowiedź:* $1/\sqrt{2}$.

Oznacz przez O_1 i O_2 środki, a przez r_1 i r_2 promienie okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ACD i BCD. Wykorzystując podobieństwo trójkątów, udowodnij, że $r_1^2+r_2^2=r^2$, gdzie r to promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a następnie rozważ trójkąt DO_1O_2.