Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów — poziom OM

Olimpiada Matematyczna Juniorów
www.omj.edu.pl

28 maja – 4 czerwca 2023 r.

Skład komputerowy: Hai An Mai, Kosma Kasprzak, Arkadiusz Męcel, Piotr Miernik, Stefan Świerczewski

Rysunki: Hai An Mai, Stefan Świerczewski

Recenzent: dr Arkadiusz Męcel

Konsultacja merytoryczna: dr Joanna Jaszuńska

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa
www.omj.edu.pl

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów (poziom OM) odbył się w dniach 28 maja – 4 czerwca 2023 r. w Domu Rekolekcyjno-Konferencyjnym „Wieczernik" w miejscowości Święta Katarzyna (woj. świętokrzyskie). Do udziału w Obozie zakwalifikowano 20 uczniów z najwyższymi wynikami w XVIII edycji OMJ.

Każdego dnia uczestnicy Obozu rozwiązywali zadania w formule konkursowej, pracując zarówno indywidualnie, jak i w grupach. Popołudnia poświęcone były na wykłady tematyczne i zajęcia warsztatowe. W piątek odbył się spacer do Świętokrzyskiego Parku Narodowego, a w sobotę przeprowadzony został mecz matematyczny.

W niniejszym opracowaniu zgromadzone są wszystkie zadania konkursowe wraz z rozwiązaniami. Zachęcamy do wykorzystania tych materiałów w przygotowaniach do rozpoczęcia przygody z Olimpiadą Matematyczną dla szkół ponadpodstawowych, którą wielu finalistów i laureatów OMJ podejmuje jeszcze w trakcie nauki w szkole podstawowej lub bezpośrednio po jej zakończeniu.

Niektóre problemy zawarte w niniejszym opracowaniu są zdecydowanie trudniejsze od zadań rozwiązywanych na konkursach juniorskich — nawet na zawodach międzynarodowych. Warto przy tym podkreślić, że tematyka zajęć na Obozie dotyczyła przede wszystkim tych elementów przygotowania do Olimpiady Matematycznej, które stanowią naturalne rozszerzenie programu merytorycznego OMJ. Pominięta jest natomiast szeroka gama zagadnień dotyczących pojęć omawianych jedynie w szkole ponadpodstawowej, choćby pojęcia funkcji. W ten sposób z materiałów zawartych w niniejszej broszurze korzystać mogą nie tylko ambitni uczestnicy OMJ, ale także uczniowie młodszych klas szkół ponadpodstawowych.

Miłej lektury!

Kadra Obozu

Uczestnicy Obozu Naukowego OMJ (poziom OM)

Uczniowie: Mikołaj Badura, Tymoteusz Czapkowski, Tomasz Ferenc, Dominik Findeisen, Michał Fronczek, Rafał Grzyb, Alicja Kaliszewska, Filip Klim, Juliusz Klim, Mariia Kulyk, Adam Kurzyński, Łucja Łyziak, Emil Makal, Karolina Michalak, Stanisław Nawrocki, Anna Pilipczuk, Wojciech Szymczyk, Adam Wiatr, Michał Wolny, Jakub Zagrodzki.

Kadra: Paweł Dziuba (kierownik), Hai An Mai, Arkadiusz Męcel, Piotr Miernik, Stefan Świerczewski.

Treści zadań

Zadanie 1.

Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczba $(n+1)^n-1$ jest podzielna przez n^2.

Zadanie 2.

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Okrąg opisany na trójkącie BOC przecina proste AB oraz AC odpowiednio w punktach D oraz E, przy czym punkt D jest różny od punktu B i leży na przedłużeniu odcinka AB, zaś punkt E jest różny od punktu C i leży na boku AC. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykaż, że wysokości trójkąta ADE przecinają się w punkcie O.

Zadanie 3.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = 3$ i kąty ABC oraz BAC mają miary nie większe od $60°$. Udowodnij, że spośród dowolnych 10 punktów leżących wewnątrz tego trójkąta istnieją takie dwa, których odległość równa jest co najwyżej 1.

Zadanie 4.

Liczby całkowite a, b, c, d spełniają warunek $a + b + c + d = 0$. Wykaż, że liczba $n = (ab - cd)(bc - ad)(ac - bd)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 5.

Znajdź wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, dla których liczba $4^n - n$ jest wielokrotnością 17.

Zadanie 6.

Na prostokątnym placu o wymiarach 3×100, podzielonym na 300 pól rozmiaru 1×1, maszeruje piechur. Robi to tak, aby na każdym polu znaleźć się dokładnie raz. Piechur rozpoczyna marsz na pewnym polu i zostawia na nim tabliczkę z liczbą 1. Gdy piechur przechodzi na i-te z kolei pole, zostawia na nim tabliczkę z liczbą i, a następnie przechodzi na pole sąsiadujące z i-tym przez wspólny bok. Jaka jest najmniejsza liczba naturalna k o tej własności, że po poznaniu liczb zostawionych na pewnych k polach można jednoznacznie odtworzyć położenie wszystkich liczb?

Zadanie 7.

Wyznacz wszystkie pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych, dla których wartości ułamków

$$\frac{a^2+b}{b^2-a} \quad \text{oraz} \quad \frac{b^2+a}{a^2-b}$$

są liczbami całkowitymi.

Zadanie 8.

Dany jest równoległobok $ABCD$. Wybieramy takie punkty E, F odpowiednio na bokach BC oraz AD, że okrąg opisany na trójkącie ABE jest styczny z prostą CF. Udowodnij, że okrąg opisany na trójkącie CDF jest styczny z prostą AE.

Zadanie 9.

Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniające warunki $a \geqslant b \geqslant c$ oraz

$$\frac{a+b}{bc} = \frac{b+c}{ca} = \frac{c+a}{ab}.$$

Wykaż, że $a = b = c$.

Zadanie 10.

Dany jest ciąg liczb całkowitych (a_n). Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n sumę pierwszych n wyrazów tego ciągu, czyli liczbę $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, oznaczamy przez S_n. Załóżmy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość $S_n = 3n^2$. Udowodnij, że różnica dwóch kolejnych wyrazów ciągu (a_n) jest stała.

Zadanie 11.

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$, oraz punkt D leżący na boku BC w taki sposób, że prosta AD jest dwusieczną kąta BAC. Prosta prostopadła do prostej AD przechodząca przez punkt B przecina okrąg opisany na trójkącie ABD w punkcie E, różnym od punktu B. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnij, że punkty A, O i E są współliniowe.

Zadanie 12.

An i Piotrek toczą grę na szachownicy o wymiarach 2023×2023. Na polu sąsiadującym z prawej strony z lewym dolnym rogiem szachownicy znajduje się hetman. Standardowo, może on poruszać się o dowolną ilość pól wzdłuż kolumny, wiersza lub dowolnej przekątnej, na której stoi. Gracze wykonują na przemian ruchy hetmanem, przy czym zakończenie ruchu na polu, na którym pionek wcześniej już zakończył ruch lub na polu startowym tego pionka oznacza automatyczną przegraną. Wygrywa osoba, która doprowadzi hetmana do prawego górnego rogu planszy. Kto ma strategię wygrywającą, jeśli grę rozpoczyna An?

Zadanie 13.

Rozwiąż w dodatnich liczbach całkowitych równanie $3^{a!} + 4^{b!} + 5^{c!} + 4 = n^2$.

Zadanie 14.

Jaś dysponuje następującą operacją na zbiorze wierzchołków dowolnego trójkąta: może zamienić jeden z nich na jego obraz w symetrii względem innego wierzchołka. Czy jest możliwe, aby Jaś startując od trójkąta o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ i stosując opisaną operacje dowolną liczbę razy, otrzymał trójkąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 15.

Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ oraz $\sphericalangle BCD = 30^\circ$. Wiadomo także, że $AB = CD$ oraz $BC = 2AD$. Wykaż, że $\sphericalangle BAD = 30^\circ$.

Zadanie 16.

Dodatnie liczby całkowite n, m spełniają warunek

$$n(4n+1) = m(5m+1).$$

Wykaż, że $n - m$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 17.

Udowodnij nierówność

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2023}} > 86.$$

Zadanie 18.

Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AC = BC = CD$ oraz $\sphericalangle ABC = 70^\circ$. Wyznacz $\sphericalangle ADB$.

Zadanie 19.

Dane są dwie kolejne liczby pierwsze p i q większe od 2. Wykaż, że $p+q$ jest iloczynem co najmniej trzech liczb całkowitych większych od 1 (niekoniecznie różnych).

Zadanie 20.

Każde z $4n^2$ pól szachownicy rozmiaru $2n \times 2n$ pokolorowano na jeden z n kolorów, gdzie n jest liczbą całkowitą większą od 1. Rozstrzygnij czy istnieją na tej szachownicy cztery pola takiego samego koloru, których środki tworzą równoległobok.

Zadanie 21.

Dodatnią liczbę całkowitą n nazywamy *dziecięcą*, gdy $n - 11$ jest liczbą pierwszą oraz istnieją takie dodatnie liczby całkowite a oraz b, że spełnione są warunki

$$4n + 1 = a^2 \quad \text{oraz} \quad 11n + 4 = b^2.$$

Znajdź wszystkie liczby dziecięce.

Zadanie 22.

Okręgi ω_1 oraz ω_2 o środkach odpowiednio w punktach O_1 i O_2 przecinają się w punktach A oraz B. Prosta AO_1 przecina okrąg ω_2 w punkcie C różnym od punktu A. Prosta AO_2 przecina okrąg ω_1 w punkcie D różnym od punktu A. Udowodnij, że punkt A jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt BCD.

Zadanie 23.

Dane są dodatnie liczby całkowite x i y, takie że liczba xy jest dzielnikiem liczby $x^2 + y^2 - x$. Wykaż, że x jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 24.

Dana jest dodatnia liczba całkowita $n > 1$. Dla jakich liczb rzeczywistych x wyrażenie $x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - x^{2n-3} + \ldots + x^2 - x + \frac{n}{4}$ przyjmuje wartość 0?

Zadanie 25.

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\sphericalangle BCA = 90^\circ$. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC oraz CA, przy czym

$$BD \cdot DC = CE \cdot EA.$$

Wykaż, że $DM = EM$.

Zadanie 26.

Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω, w którym odcinki AC i BD są prostopadłe. Niech punkty E i F będą odbiciami punktu D odpowiednio względem prostych AB oraz BC. Prosta EF przecina krótsze łuki AB, AC okręgu ω odpowiednio w punktach X i Y. Udowodnij, że $BX = BY$.

Zadanie 27.

Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n, takie że liczba $2^n - 1$ nie ma żadnego dzielnika pierwszego większego od 7.

Zadanie 28.

W pewnej szkole jest n dzieci, i funkcjonuje w niej k klubów F_1, F_2, $\ldots$, F_k. Każde dziecko należy do pewnej nieujemnej liczby z nich. Załóżmy, że żaden klub nie zawiera się w innym klubie, tzn. nie istnieje klub F_i, które wszyscy członkowie są w klubie F_j, dla pewnych $i \neq j$. Niech n_i oznacza liczbę osób z i-tego klubu. Udowodnij, że

$$\frac{1}{\binom{n}{n_1}} + \frac{1}{\binom{n}{n_2}} + \ldots + \frac{1}{\binom{n}{n_k}} \leqslant 1.$$

Zadanie 29.

Na okręgu umieszczono n liczb rzeczywistych, gdzie n jest liczbą całkowitą większą od 3. Dla każdych czterech kolejnych liczb a, b, c, d, położonych w tej kolejności na okręgu, zachodzi równość $a + d = b + c$. Dla jakich liczb n wynika stąd, że wszystkie liczby umieszczone na okręgu są równe?

Zadanie 30.

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniające układ równań

$$\begin{cases} a + b + c + d = 20, \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd = 150. \end{cases}$$

Zadanie 31.

Niech a, b, c będą niezerowymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek

$$|(a+b)(b+c)(c+a)| = |(a-b)(b-c)(c-a)|.$$

Wykaż, że

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right| \geqslant 1.$$

Zadanie 32.

Dane jest n kart ustawionych w rzędzie, przy czym n jest dodatnią liczbą całkowitą. Każda karta ma jedną stronę białą, a drugą czarną. Ruch polega na wzięciu dwóch sąsiednich kart, z których lewa jest biała, a prawa może być czarna lub biała, i odwróceniu ich obydwu. Udowodnij, że niezależnie od początkowego ułożenia kart można wykonać tylko skończenie wiele ruchów.

Zadanie 33.

Na tablicy znajdują się liczby $1, 2, \ldots, n$, gdzie $n > 1$ jest dodatnią liczbą całkowitą. Dopóki na tablicy nie pozostanie jedna liczba, z tablicy wybierane są w kolejnych krokach pewne dwie liczby a i b, następnie liczby te są ścierane i w ich miejscu zapisana jest jedna liczba $\frac{ab}{a+b}$. Udowodnij, że po wykonaniu $n-1$ kroków liczba pozostała na tablicy jest mniejsza od $\frac{n+1}{2n}$.

Zadanie 34.

Każdy punkt w przestrzeni pomalowano na jeden z dwóch kolorów: kawowy lub herbaciany. Trójkąt nazwiemy *jednokolorowym*, jeśli ma trzy wierzchołki tego samego koloru. Czy istnieje jednokolorowy trójkąt równoboczny o boku długości 2023?

Zadanie 35.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC > BC$. Niech punkt M będzie środkiem tego łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC, który zawiera punkt C. Niech punkt H będzie rzutem prostopadłym punktu M na prostą AC. Wykaż, że

$$AH = HC + CB.$$

Zadanie 36.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ wpisany w okrąg o środku O. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P, a proste BC i AD przecinają się w punkcie Q. Okręgi opisane na trójkątach CDQ oraz BCP przecinają się w punkcie R, różnym od punktu C. Wykaż, że punkty A, O, C oraz R leżą na jednym okręgu.

Zadanie 37.

Dany jest trójkąt różnoboczny ABC. Niech punkty D, E i F będą spodkami wysokości tego trójkąta opuszczonych odpowiednio z punktów A, B i C. Oznaczmy odpowiednio przez X, Y, Z punkty przecięcia par prostych: AB i DE, AC i DF oraz BC i EF. Udowodnij, że punkty X, Y, Z są współliniowe.

Zadanie 38.

Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Załóżmy, że również liczby

$$\frac{a+b}{c}, \quad \frac{b+c}{a}, \quad \frac{c+a}{b}$$

są całkowite dodatnie. Znajdź wszystkie możliwe wartości liczby

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}.$$

Zadanie 39.

Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą $n > 9$, której zapis dziesiętny nie zawiera cyfry 0 ani 7, ale zamiana dowolnej cyfry liczby n na cyfrę 7 daje liczbę podzielną przez 7.

Przykład. Liczba 143 nie ma własności opisanej w zadaniu. Mimo, że liczba 147 jest podzielna przez 7, to liczba 173 nie jest podzielna przez 7.

Rozwiązania zadań

Zadanie 1.

Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczba $(n+1)^n - 1$ jest podzielna przez n^2.

Rozwiązanie: Sposób I

Skorzystajmy ze wzoru na różnicę n-tych potęg:

$$(n+1)^n - 1 = (n+1)^n - 1^n = n((n+1)^{n-1} + (n+1)^{n-2} + \ldots + (n+1) + 1).$$

Wystarczy zatem udowodnić, że $(n+1)^{n-1} + (n+1)^{n-2} + \ldots + (n+1) + 1$ jest liczbą podzielną przez n. Dla dowolnej nieujemnej liczby całkowitej k liczba $(n+1)^k$ daje resztę 1 przy dzieleniu przez n. Zatem suma n kolejnych naturalnych potęg liczby $n+1$ jest podzielna przez n. Stąd liczba $(n+1)^n - 1$ jest podzielna przez n^2.

Sposób II

Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Dla $n \geqslant 2$ skorzystamy ze wzoru dwumianowego Newtona:

$$(n+1)^n - 1 = \binom{n}{0} n^n + \binom{n}{1} n^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} n + \binom{n}{n} - 1.$$

Suma ostatnich dwóch składników sumy po prawej stronie powyższej równości jest równa 0. Każdy z pierwszych $n-1$ składników jest natomiast podzielny przez n^2. Pozostaje więc stwierdzić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n mamy

$$\binom{n}{n-1} n = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} \cdot n = n^2.$$

W rezultacie liczba $(n+1)^n - 1$ jest podzielna przez n^2.

Uwaga. Dla nieujemnych liczb całkowitych $n \geqslant k$ liczbę $\binom{n}{k}$ określamy formułą

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

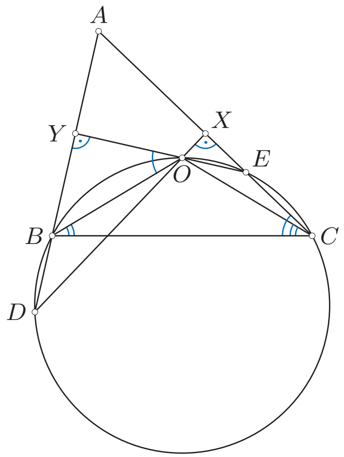
Można udowodnić, że liczba ta równa jest liczbie k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego. Wzór dwumianowy Newtona, z którego skorzystaliśmy, ma postać

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \ldots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n.$$

Zadanie 2.

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Okrąg opisany na trójkącie BOC przecina proste AB oraz AC odpowiednio w punktach D oraz E, przy czym punkt D jest różny od punktu B i leży na przedłużeniu odcinka AB, zaś punkt E jest różny od punktu C i leży na boku AC. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykaż, że wysokości trójkąta ADE przecinają się w punkcie O.

Rozwiązanie: Niech X, Y będą odpowiednio punktami przecięcia prostych DO i AC oraz prostych EO i AB. Wystarczy więc udowodnić, że $\sphericalangle DYO = \sphericalangle EXO = 90^\circ$. Uzasadnimy równość $\sphericalangle DYO = 90^\circ$, wyznaczając miary kątów YOB oraz YBO za pomocą miar kątów wewnętrznych trójkąta ABC.



rys. 1

Punkty B, O, E i C leżą na jednym okręgu, skąd $\sphericalangle YOB = 180^\circ - \sphericalangle BOE = \sphericalangle ECB$.

Mamy też $\sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB$, ponieważ BO i CO to promienie okręgu opisanego na trójkącie ABC. Stąd

$$\sphericalangle YBO = \sphericalangle ABO = \sphericalangle ABC - \sphericalangle OBC =$$
$$= \sphericalangle ABC - (90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BOC) = \sphericalangle ABC - 90^\circ + \sphericalangle BAC.$$

W ostatniej równości korzystamy z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym.

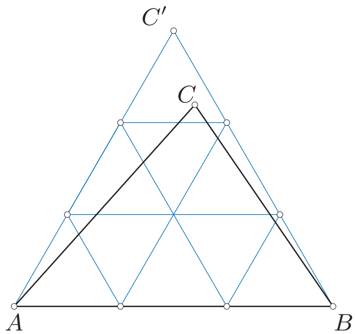
Wreszcie, znając miary kątów YOB oraz YBO, uzyskujemy:

$$\sphericalangle BYO = 180^\circ - \sphericalangle YOB - \sphericalangle YBO = 180^\circ - (\sphericalangle ECB + \sphericalangle ABC - 90^\circ + \sphericalangle BAC) = 90^\circ.$$

Zadanie 3.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = 3$ i kąty ABC oraz BAC mają miary nie większe od 60°. Udowodnij, że spośród dowolnych 10 punktów leżących wewnątrz tego trójkąta istnieją takie dwa, których odległość równa jest co najwyżej 1.

Rozwiązanie: Niech C' będzie punktem leżącym po tej samej stronie prostej AB co punkt C, tak że trójkąt ABC' jest równoboczny. Zauważmy, że założenie o miarach kątów CAB oraz CBA gwarantuje, że trójkąt ABC leży wewnątrz trójkąta ABC'. Dzielimy trójkąt ABC' na 9 mniejszych trójkątów równobocznych o boku 1 (rys. 2).



rys. 2

Spośród 10 punktów leżących wewnątrz trójkąta ABC pewne dwa leżą w tym samym trójkącie równobocznym o boku 1. Każde dwa punkty należące do takiego trójkąta są od siebie oddalone o nie więcej niż 1, co kończy dowód.

Zadanie 4.

Liczby całkowite a, b, c, d spełniają warunek $a + b + c + d = 0$. Wykaż, że liczba $n = (ab - cd)(bc - ad)(ac - bd)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Mamy $d = -(a+b+c)$. Wstawiając tę zależność do każdego z wyrażeń $ab - cd$, $bc - ad$, $ac - bd$, uzyskujemy:

$$ab - cd = ab + c(a + b + c) = ab + ac + bc + c^2 = (a + c)(b + c),$$
$$bc - ad = bc + a(a + b + c) = bc + a^2 + ab + ac = (a + c)(a + b),$$
$$ac - bd = ac + b(a + b + c) = ac + ab + b^2 + bc = (a + b)(b + c).$$

W rezultacie $n = ((a + b)(b + c)(a + c))^2$.

Zadanie 5.

Znajdź wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, dla których liczba $4^n - n$ jest wielokrotnością 17.

Rozwiązanie: Skoro $4^4 \equiv 1 \pmod{17}$, to należy rozważyć cztery przypadki:

(a) jeśli $n \equiv 0 \pmod 4$, to $4^n \equiv 1 \pmod{17}$,

(b) jeśli $n \equiv 1 \pmod 4$, to $4^n \equiv 4 \pmod{17}$,

(c) jeśli $n \equiv 2 \pmod 4$, to $4^n \equiv 16 \pmod{17}$,

(d) jeśli $n \equiv 3 \pmod 4$, to $4^n \equiv 13 \pmod{17}$.

Wykażemy, że szukane liczby n są, w zależności od przypadku (a)–(d), w jednej z postaci $68t+52$, $68t+21$, $68t+50$, $68t+47$, gdzie t jest nieujemną liczbą całkowitą.

Rozważymy tylko przypadek (a). Szukamy wszystkich liczb n, takich że

$$n \equiv 0 \pmod 4 \quad \text{oraz} \quad n \equiv 1 \pmod{17}.$$

Zauważmy, że jeśli pewna liczba n spełnia powyższe warunki, to spełnia je również każda liczba postaci $n + 4 \cdot 17t = n + 68t$, gdzie t jest liczbą całkowitą. Zatem wystarczy znaleźć rozwiązanie dwóch powyższych warunków wśród nieujemnych liczb całkowitych mniejszych od 68. Jedynym takim rozwiązaniem okazuje się liczba 52. Rzeczywiście, gdyby istniała inna liczba m' mająca te własności, wówczas liczba $|52 - m'|$ byłaby podzielna przez 68, co jest niemożliwe. W rezultacie każda liczba n spełniająca warunki opisane w przypadku (a) ma postać $68t + 52$, gdzie t jest dowolną nieujemną liczbą całkowitą. Analogicznie rozpatrujemy przypadki $(b) - (d)$.

Uwaga. W rozwiązaniu skorzystaliśmy z idei dowodu szczególnej wersji *chińskiego twierdzenia o resztach*. Mówi ono, w interesującym nas przypadku, że jeśli dane są dodatnie i względnie pierwsze liczby całkowite x, y oraz dowolne liczby całkowite r_1 oraz r_2, to istnieje dokładnie jedna liczba całkowita $0 \leqslant m < xy$, taka że

$$m \equiv r_1 \pmod x \quad \text{oraz} \quad m \equiv r_2 \pmod y.$$

Liczbę m wyznaczamy w następujący sposób. Skoro liczby x, y są względnie pierwsze, to istnieją liczby całkowite a, b, takie że $ax+by = 1$ (jest to tzw. lemat Bézouta). Wówczas liczba $byr_1 + axr_2$ spełnia dwa warunki wypisane wyżej. Dodając do niej odpowiednią wielokrotność xy, uzyskujemy szukane m. W rozważanym przypadku (a) mamy $x = 4$, $y = 17$, $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ oraz $-4 \cdot 4 + 1 \cdot 17 = 1$, czyli $a = -4$, $b = 1$. Stąd uzyskujemy liczbę $byr_1 + axr_2 = -4 \cdot 4 \cdot 1 = -16$, czyli $m = 52 = -16 + 68$.

Zadanie 6.

Na prostokątnym placu o wymiarach 3×100, podzielonym na 300 pól rozmiaru 1×1, maszeruje piechur. Robi to tak, aby na każdym polu znaleźć się dokładnie raz. Piechur rozpoczyna marsz na pewnym polu i zostawia na nim tabliczkę z liczbą 1. Gdy piechur przechodzi na i-te z kolei pole, zostawia na nim tabliczkę z liczbą i, a następnie przechodzi na pole sąsiadujące z i-tym przez wspólny bok. Jaka jest najmniejsza liczba naturalna k o tej własności, że po poznaniu liczb zostawionych na pewnych k polach można jednoznacznie odtworzyć położenie wszystkich liczb?

Rozwiązanie:

Wykażemy, że odpowiedzią na problem postawiony w zadaniu jest liczba $k = 2$. Zacznijmy od podania odpowiedniego przykładu w tej właśnie sytuacji.

Załóżmy, że poziomy bok prostokąta 3×100 jest dłuższy od pionowego. Niech dwiema poznanymi przez nas liczbami zapisanymi przez piechura będą: liczba 1 na tabliczce w lewym górnym rogu oraz liczba 199 na tabliczce w lewym dolnym rogu. Uzasadnimy, że jedyną możliwą trasą piechura jest ta przedstawiona poniżej.

1	2	3		...		98	99	300
198	197	196		...		101	100	299
199	200	201		...		296	297	298

rys. 3

Zauważmy najpierw, że jeśli pola o numerach x_1, x_2 znajdują się odpowiednio w wierszach i_1, i_2 i kolumnach j_1, j_2, to zachodzi nierówność

$$|x_1 - x_2| \geqslant |i_1 - i_2| + |j_1 - j_2|.$$

Niech a będzie liczbą wpisaną w tabliczkę stojącą w prawym górnym rogu prostokąta. Wiemy, że $|a - 1| \geqslant 99$ i $|a - 199| \geqslant 101$. Jedyną liczbą z przedziału $[1, 300]$ spełniającą obie te nierówności jest 300, więc liczba ta musi być wartością a.

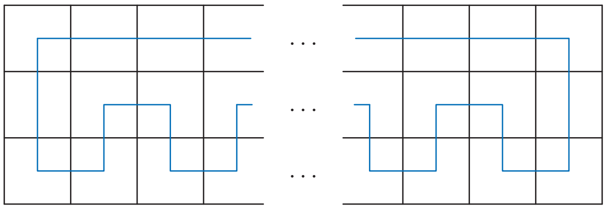
Jeśli natomiast w prawe dolne pole została wpisana liczba b, dostajemy nierówności

$$|b - 1| \geqslant 101, \quad |b - 199| \geqslant 99, \quad |b - 300| \geqslant 2,$$

skąd $b = 298$. To już pozwala nam jednoznacznie otworzyć trasę piechura po pojawieniu się w lewym dolnym rogu — musiał on iść poziomo aż do prawego brzegu prostokąta, a następnie pionowo aż do górnego brzegu.

Wnioskujemy stąd, że do lewego dolnego pola narożnego piechur mógł wejść tylko od góry, co wyznacza jednoznacznie pole z tabliczką o numerze 198. Teraz nietrudno zauważyć, że jedyną możliwą trasą mógł być przemarsz od lewego górnego rogu poziomo aż do przedostatniej kolumny, przejście o jedno pole w dół, a następnie dojście poziomo do znanego już przez nas pola z tabliczką 198. Udało nam się jednoznacznie odtworzyć liczby wpisane na tabliczkach na wszystkich 300 polach prostokąta, więc podany przykład spełnia warunek zadania. Stad $k \geqslant 2$.

Wykażemy teraz, że dla $k = 1$, niezależnie od tego które wskażemy pole i tego jaka liczba pozostawiona będzie na znajdującej się na nim tabliczce, możliwe będzie wskazanie dwóch różnych możliwych tras przemarszu spełniających warunek zadania. Istotnie, piechur mógł rozpocząć w dowolnym polu i kierować się w jednym z dwóch kierunków wzdłuż poniższej łamanej, co daje 600 różnych możliwych tras.



rys. 4

Nietrudno zauważyć, że w ramach tych wskazanych 600 tras, każda z 300 liczb $1, 2, \ldots, 300$ pojawia się na każdym polu dwukrotnie — raz przy przejściu zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara, a raz w kierunku przeciwnym. Zatem nie jesteśmy w stanie jednoznacznie odtworzyć trasy, znając numer znajdujący się na tabliczce tylko jednego pola. Stąd minimalną możliwą wartością k faktycznie jest 2.

Zadanie 7.

Wyznacz wszystkie pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych, dla których wartości ułamków

$$\frac{a^2+b}{b^2-a} \quad \text{oraz} \quad \frac{b^2+a}{a^2-b}$$

są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie: Dla dowolnej pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych liczby $a^2 + b$ oraz $b^2 + a$ są dodatnie. Aby ułamki o dodatnich licznikach były liczbami całkowitymi konieczne jest, aby w każdym z nich licznik był nie mniejszy od mianownika. Otrzymujemy w ten sposób nierówności

$$a^2 + b \geqslant b^2 - a \quad \text{oraz} \quad b^2 + a \geqslant a^2 - b.$$

Przekształcając równoważnie pierwszą nierówność, otrzymujemy $a^2 - b^2 \geqslant -(a+b)$ skąd, dzieląc przez dodatnią liczbę $a+b$, dostajemy $a-b \geqslant -1$. Postępując podobnie z drugą nierównością, uzyskujemy $a - b \leqslant 1$. Łącząc uzyskane warunki, uzyskujemy $-1 \leqslant a-b \leqslant 1$. W rezultacie prawdziwa jest jedna z równości $a = b$ lub $a = b \pm 1$.

Jeżeli $a = b$, to

$$\frac{a^2+b}{a^2-b} = \frac{b^2+a}{b^2-a} = \frac{a^2+a}{a^2-a} = \frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1}.$$

Liczba ta jest całkowita wtedy i tylko wtedy, gdy $a - 1$ jest dzielnikiem liczby 2, co w świetle założenia $a > 0$ oznacza, że $a = b = 2$ lub $a = b = 3$.

Jeżeli $a = b \pm 1$, to biorąc pod uwagę, że dane ułamki są symetryczne ze względu na a, b, możemy założyć bez straty ogólności, że $b = a + 1$. Sprawdzimy, kiedy liczby

$$\frac{a^2+a+1}{a^2+a+1}, \quad \frac{a^2+3a+1}{a^2-a-1}$$

są całkowite. Pierwsza z nich jest równa 1. Odejmując natomiast od drugiego ułamka liczbę 1, uzyskujemy ułamek

$$\frac{4a+2}{a^2-a-1}.$$

Ponownie wykorzystując obserwację, że ułamek o wartości całkowitej i dodatnim liczniku oraz mianowniku ma licznik nie mniejszy od mianownika, uzyskujemy nierówność $4a + 2 \geqslant a^2 - a - 1$. Przekształcamy tę nierówność równoważnie:

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant a^2 - 5a - 3, \\ 0 &\geqslant 4a^2 - 20a - 12, \\ 0 &\geqslant (2a-5)^2 - 37, \\ 37 &\geqslant (2a-5)^2. \end{aligned}$$

Uzyskujemy $a \leqslant 5$. Bezpośrednio sprawdzając pięć możliwych wartości a, przekonujemy się, że warunki zadania są spełnione jedynie gdy $a = 1$ lub $a = 2$.

Łącząc wyniki uzyskane w obydwu przypadkach, uzyskujemy wszystkie możliwe pary (a, b), czyli $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$.

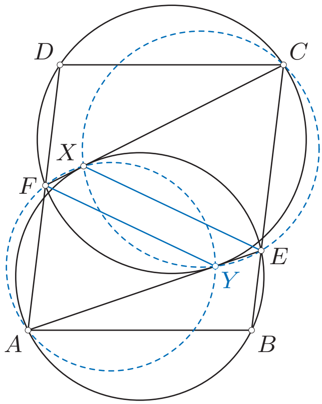
Zadanie 8.

Dany jest równoległobok $ABCD$. Wybieramy takie punkty E, F odpowiednio na bokach BC oraz AD, że okrąg opisany na trójkącie ABE jest styczny z prostą CF. Udowodnij, że okrąg opisany na trójkącie CDF jest styczny z prostą AE.

Rozwiązanie: Niech X będzie punktem styczności prostej CF z okręgiem opisanym na trójkącie ABE. Niech Y będzie takim punktem na odcinku AE, że proste FY i XE są równoległe. Zatem $\sphericalangle XFY = \sphericalangle EXC$. Korzystając z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą, otrzymujemy $\sphericalangle EXC = \sphericalangle EAX$, czyli

$$\sphericalangle XFY = \sphericalangle EXC = \sphericalangle EAX = \sphericalangle YAX,$$

więc na czworokącie $AFXY$ można opisać okrąg.



rys. 5

Stąd wynika, że $\sphericalangle YXC = \sphericalangle FAY$. Skoro odcinki AD i BC są równoległe, to

$$\sphericalangle YXC = \sphericalangle FAY = \sphericalangle AEB = 180^\circ - \sphericalangle YEC,$$

czyli na czworokącie $CXYE$ można opisać okrąg. Stąd otrzymujemy równości

$$\sphericalangle FYA = \sphericalangle XEY = \sphericalangle XCY = \sphericalangle FCY.$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika zatem, że okrąg opisany na trójkącie FCY jest styczny do prostej AE w punkcie Y.

Zadanie 9.

Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniające warunki $a \geqslant b \geqslant c$ oraz

$$\frac{a+b}{bc} = \frac{b+c}{ca} = \frac{c+a}{ab}.$$

Wykaż, że $a = b = c$.

Rozwiązanie: Sposób I. Z nierówności $a \geqslant b \geqslant c$ wynika, że

$$\frac{a+b}{bc} \geqslant \frac{a+b}{ca} \geqslant \frac{b+c}{ca}.$$

Z warunków zadania wnioskujemy, że powyższe nierówności są równościami. Stąd $bc = ca$, czyli $a = b$. Analogicznie dowodzimy równości $a = c$ oraz $b = c$.

Sposób II. Przekształcamy równoważnie dane w założeniu równości poprzez pomnożenie wszystkich stron przez abc, uzyskując $a^2 + ab = b^2 + bc = c^2 + ca$. Stąd otrzymujemy $a^2 - b^2 = b(c - a)$, czyli $(a - b)(a + b) + b(a - c) = 0$.

Liczby a, b, c są dodatnie, a liczby $a-b$, $a-c$ są nieujemne. Zatem liczby $(a-b)(a+b)$ oraz $b(a - c)$ są nieujemne. Skoro ich suma równa jest 0, to każdy ze składników równy jest 0. Zatem $(a - b)(a + b) = 0 = b(a - c)$, co implikuje $a = b = c$.

Zadanie 10.

Dany jest ciąg liczb całkowitych (a_n). Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n sumę pierwszych n wyrazów tego ciągu, czyli liczbę $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, oznaczamy przez S_n. Załóżmy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość $S_n = 3n^2$. Udowodnij, że różnica dwóch kolejnych wyrazów ciągu (a_n) jest stała.

Rozwiązanie: Liczba $a_2 - a_1$ jest równa $S_2 - 2S_1 = 3(2^2 - 2 \cdot 1^2) = 6$.

Zauważmy, że dla każdego $n \geqslant 2$ mamy $a_n = S_n - S_{n-1}$. Stąd

$$a_{n+1} - a_n = (S_{n+1} - S_n) - (S_n - S_{n-1}) = S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n.$$

Korzystając z założonej wartości S_n uzyskujemy

$$S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n = 3((n+1)^2 + (n-1)^2 - 2n^2) =$$

$$= 3(n^2 + 2n + 1 + n^2 - 2n + 1 - 2n^2) = 3 \cdot 2 = 6.$$

Otrzymaliśmy zatem dla każdego $n \geqslant 1$ równość $a_{n+1} - a_n = 6$.

Zadanie 11.

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$, oraz punkt D leżący na boku BC w taki sposób, że prosta AD jest dwusieczną kąta BAC. Prosta prostopadła do prostej AD przechodząca przez punkt B przecina okrąg opisany na trójkącie ABD w punkcie E, różnym od punktu B. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnij, że punkty A, O i E są współliniowe.

Rozwiązanie: Oznaczmy miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC przy wierzchołkach A, B i C odpowiednio przez α, β oraz γ. Wówczas $\sphericalangle BAD = \frac{\alpha}{2}$, więc

$$\sphericalangle EBA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Punkty A, E, D, B leżą na jednym okręgu, zatem z twierdzenia o kącie wpisanym mamy

$$\sphericalangle DAE = \sphericalangle DBE = \sphericalangle DBA - \sphericalangle EBA = \beta - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} + \beta - 90^\circ.$$

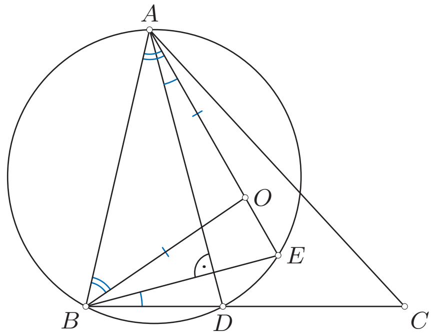
Zatem

$$\sphericalangle BAE = \sphericalangle BAD + \sphericalangle DAE = \alpha + \beta - 90^\circ.$$

Korzystając z równości promieni AO oraz BO, uzyskujemy

$$\begin{aligned}\sphericalangle BAO = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle AOB) = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sphericalangle ACB = \\ = 90^\circ - \gamma = \alpha + \beta - 90^\circ = \sphericalangle BAE.\end{aligned}$$

Stąd wynika, że $\sphericalangle BAO = \sphericalangle BAE$, czyli punkty A, O, E są współliniowe.



rys. 6

Zadanie 12.

An i Piotrek toczą grę na szachownicy o wymiarach 2023×2023. Na polu sąsiadującym z prawej strony z lewym dolnym rogiem szachownicy znajduje się hetman. Standardowo, może on poruszać się o dowolną ilość pól wzdłuż kolumny, wiersza lub dowolnej przekątnej, na której stoi. Gracze wykonują na przemian ruchy hetmanem, przy czym zakończenie ruchu na polu, na którym pionek wcześniej już zakończył ruch lub na polu startowym tego pionka oznacza automatyczną przegraną. Wygrywa osoba, która doprowadzi hetmana do prawego górnego rogu planszy. Kto ma strategię wygrywającą, jeśli grę rozpoczyna An?

Rozwiązanie: Nazwijmy *przegrywającymi* te pola szachownicy, z których można wykonać ruch hetmanem bezpośrednio do prawego górnego pola. Jeśli jeden z graczy postawi hetmana na pole przegrywające, to poniesie porażkę (zakładając, że drugi gracz jest rozsądny). Pola, które nie są przegrywające i nie są prawym górnym polem szachownicy nazwijmy *neutralnymi*. Ponadto, pole startowe i pola, na których hetman już kiedyś zakończył ruch, będziemy nazywać *zajętymi*. Wreszcie, oznaczmy przekątną szachownicy biegnącą od lewego dolnego do prawego górnego rogu jako l.

Udowodnimy, że strategię wygrywającą posiada An. Jest ona następująca. W pierwszym ruchu An przestawia hetmana na pole symetryczne do pola startowego względem prostej l (czyli na pole sąsiadujące z lewym dolnym polem szachownicy dolną krawędzią). Następnie, w odpowiedzi na ruch Piotrka, An postępuje zgodnie z następującymi dwiema zasadami.

- Jeśli Piotrek przesunie hetmana na pole przegrywające, to An wygrywa przesuwając hetmana do prawego górnego rogu.
- Jeśli Piotrek przestawi hetmana na pewne pole neutralne, to An przestawia hetmana na symetryczne do niego względem przekątnej l pole neutralne.

W ten sposób po każdym ruchu Ana zbiór zajętych pól jest symetryczny względem prostej l, więc postępując zgodnie z drugim punktem strategii An ma pewność, że pole (neutralne), na które chce przesunąć hetmana, nie jest jeszcze zajęte.

Skoro w każdym ruchu liczba zajętych pól rośnie o 1, to gra musi się kiedyś skończyć, a skoro An ma odpowiedź na każdy ruch Piotrka, gra musi skończyć się zwycięstwem Ana. Zatem to on ma strategię wygrywającą.

Zadanie 13.

Rozwiąż w dodatnich liczbach całkowitych równanie $3^{a!}+4^{b!}+5^{c!}+4=n^2$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że liczba $5^{c!}$ daje resztę 1 przy dzieleniu przez 4. Stąd

$$3^{a!}+4^{b!}+5^{c!}+4 \equiv 3^{a!}+1 \pmod 4.$$

Dla $a>1$ liczba $a!$ jest podzielna przez 2, więc $3^{a!}\equiv 1 \pmod 4$. Zatem dla $a>1$ mamy $3^{a!}+1\equiv 2 \pmod 4$. Z drugiej strony $3^{a!}+1\equiv n^2 \pmod 4$, co jest niemożliwe, gdyż kwadrat liczby całkowitej daje przy dzieleniu przez 4 jedynie reszty 0 lub 1. Stąd $a=1$ i rozważane równanie przybiera postać $4^{b!}+5^{c!}+7=n^2$.

Dla $b>1$ liczba $b!$ jest podzielna przez 2, więc $4^{b!}\equiv 1 \pmod 5$. Stąd

$$4^{b!}+5^{c!}+7\equiv 3 \pmod 5.$$

Z drugiej strony kwadrat liczby całkowitej daje przy dzieleniu przez 5 jedynie reszty 0, 1 lub 4. Stąd $b=1$. Rozważane równanie przybiera więc postać $5^{c!}+11=n^2$.

Zauważmy, że gdy $c=1$, to $n=4$, a gdy $c=2$, to $n=6$ i wtedy 11 jest różnicą dwóch kolejnych kwadratów. Stąd rozwiązaniami rozważanego równania są w tym przypadku czwórki (a,b,c,d) postaci $(1,1,1,4)$ oraz $(1,1,2,6)$.

Dla $c>2$ wyrażenie $5^{c!}$ jest oczywiście kwadratem, więc 11 znowu jest różnicą kwadratów. Jednak dla dodatnich liczb całkowitych $x\geqslant y$ warunek

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)=11$$

oznacza, że $x+y\leqslant 11$. A zatem dla $c>2$ rozważane równanie nie ma rozwiązań.

Zadanie 14.

Jaś dysponuje następującą operacją na zbiorze wierzchołków dowolnego trójkąta: może zamienić jeden z nich na jego obraz w symetrii względem innego wierzchołka. Czy jest możliwe, aby Jaś startując od trójkąta o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ i stosując opisaną operacje dowolną liczbę razy, otrzymał trójkąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie: Odpowiedź jest negatywna. Wystarczy zauważyć, że odbijając punkt o współrzędnych $A=(x_1,y_1)$ względem punktu $B=(x_2,y_2)$, uzyskujemy punkt $A'=(x_3,y_3)$ o tej własności, że punkt B jest środkiem odcinka AA', czyli

$$x_2=\frac{x_1+x_3}{2}, \quad y_2=\frac{y_1+y_3}{2}.$$

Stąd

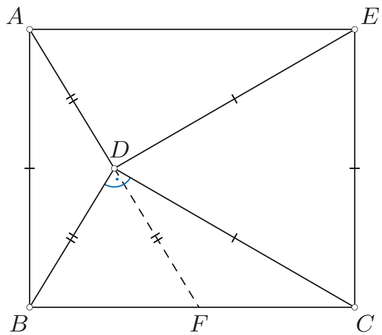
$$A' = (2x_2 - x_1, 2y_2 - y_1) = (x_1 + 2(x_2 - x_1), y_1 + 2(y_2 - y_1)).$$

Zatem przy rozważanej operacji jednakowa jest parzystość współrzędnych dowolnego punktu kratowego (o obydwu współrzędnych całkowitych) i jego obrazu w symetrii względem innego punktu kratowego. Pozostaje zauważyć, że wśród punktów $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$ dokładnie dwa mają obydwie współrzędne parzyste, a wśród punktów $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ tylko jeden punkt ma współrzędne o tej samej parzystości.

Zadanie 15.

Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $\sphericalangle ABC = 90°$ oraz $\sphericalangle BCD = 30°$. Wiadomo także, że $AB = CD$ oraz $BC = 2AD$. Wykaż, że $\sphericalangle BAD = 30°$.

Rozwiązanie: Dopełnijmy trójkąt prostokątny ABC do prostokąta $ABCE$. Mamy $CD = CE$ oraz $\sphericalangle DCE = 90° - \sphericalangle BCD = 60°$. Trójkąt CDE jest więc równoboczny.



rys. 7

Przedłużmy odcinek AD, tak by przecinał prostą BC w punkcie F. Punkt D leży więc na przecięciu symetralnej przyprostokątnej AB (a także prostej CE) z przeciwprostokątną AF trójkąta ABF. Zatem punkt D jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a co za tym idzie

$$AD = BD = DF.$$

Mamy również $\sphericalangle BCD = 30°$ oraz $BC = 2AD$ więc trójkąt BCD jest połówką trójkąta równobocznego, przy czym $\sphericalangle BDC = 90°$. Wykonując rachunek na kątach, otrzymujemy zatem

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAF = 90° - \sphericalangle DFB = 90° - \sphericalangle DBF = \sphericalangle DCB = 30°.$$

Zadanie 16.

Dodatnie liczby całkowite n, m spełniają warunek

$$n(4n+1) = m(5m+1).$$

Wykaż, że $n-m$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Mamy

$$\begin{aligned} n(4n+1) - m(5m+1) &= 4n^2 + n - 5m^2 - m = \\ &= (n-m)(4n+4m+1) - m^2 = \\ &= (n-m)(5n+5m+1) - n^2 = 0. \end{aligned}$$

W rezultacie

$$(n-m)(4n+4m+1) = m^2 \quad \text{oraz} \quad (n-m)(5n+5m+1) = n^2.$$

Liczby $4n+4m+1$ oraz $5n+5m+1$ są jednak względnie pierwsze, gdyż każdy ich wspólny dzielnik jest również dzielnikiem liczby

$$5(4n+4m+1) - 4(5n+5m+1) = 1.$$

W rezultacie największy wspólny dzielnik liczb m^2 oraz n^2 równy jest $n-m$. Największy wspólny dzielnik dwóch kwadratów jest jednak kwadratem.

Zadanie 17.

Udowodnij nierówność

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2023}} > 86.$$

Rozwiązanie: Dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej k zachodzi nierówność

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{k+1-k} = 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}).$$

Stąd

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2023}} &> 2(\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{2024}-\sqrt{2023}) = \\ &= 2\sqrt{2024} - 2 > 2 \cdot 44 - 2 = 86. \end{aligned}$$

Zadanie 18.

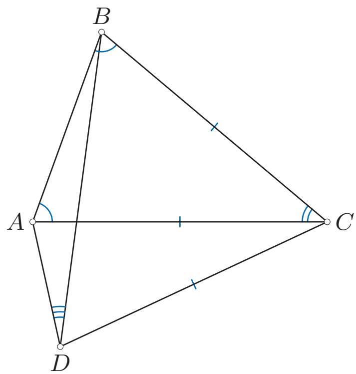
Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AC = BC = CD$ oraz $\sphericalangle ABC = 70^\circ$. Wyznacz $\sphericalangle ADB$.

Rozwiązanie: Trójkąt ABC jest równoramienny, więc

$$\sphericalangle BCA = 180^\circ - \sphericalangle ABC - \sphericalangle BAC = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ.$$

Z podanych w treści zadania równości wynika, że punkty A, B, D leżą na okręgu o środku C i promieniu BC. Wykorzystując twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym, uzyskujemy

$$\sphericalangle ADB = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB = 20^\circ.$$



rys. 8

Zadanie 19.

Dane są dwie kolejne liczby pierwsze p i q większe od 2. Wykaż, że $p+q$ jest iloczynem co najmniej trzech liczb całkowitych większych od 1 (niekoniecznie różnych).

Rozwiązanie: Liczby p oraz q są nieparzyste, więc ich suma jest liczbą parzystą. Niech $p + q = 2k$. Wtedy liczba

$$k = \frac{p+q}{2}$$

jest zawarta pomiędzy kolejnymi liczbami pierwszymi p i q, więc nie jest to liczba pierwsza. Stąd k jest liczbą złożoną.

Zadanie 20.

Każde z $4n^2$ pól szachownicy rozmiaru $2n \times 2n$ pokolorowano na jeden z n kolorów, gdzie n jest liczbą całkowitą większą od 1. Rozstrzygnij czy istnieją na tej szachownicy cztery pola takiego samego koloru, których środki tworzą równoległobok.

Rozwiązanie: Skoro pól szachownicy jest $4n^2$, a kolorów n, to na któryś z nich jest pomalowane co najmniej $4n$ pól. Niech tym kolorem będzie niebieski.

Jeśli w jakimś wierszu pojawiają się dwa niebieskie pola odległe o d, to liczbę d nazwiemy *dystansem* występującym w tym wierszu. Wnioskujemy stąd, że jeśli ten sam dystans występuje w dwóch różnych wierszach, otrzymujemy cztery niebieskie pola o środkach tworzących równoległobok, co kończy rozwiązanie. Przypuśćmy zatem, że każdy z możliwych $2n-1$ dystansów pojawia się tylko raz.

Oznaczmy przez a_i liczbę niebieskich pól w i-tym wierszu szachownicy. W takim wierszu występuje zatem co najmniej $a_i - 1$ różnych dystansów – od pierwszego niebieskiego pola do pozostałych. Skoro dystanse występujące w różnych wierszach są różne, otrzymujemy zatem nierówność

$$(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \ldots + (a_{2n} - 1) \leqslant 2n - 1.$$

Ale z założenia, że niebieskich pól jest co najmniej $4n$, wiemy, że lewa strona powyższej nierówności wynosi co najmniej $2n$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że środki pewnych niebieskich pól tworzą równoległobok.

Zadanie 21.

Dodatnią liczbę całkowitą n nazywamy *dziecięcą*, gdy $n - 11$ jest liczbą pierwszą oraz istnieją takie dodatnie liczby całkowite a oraz b, że spełnione są warunki

$$4n + 1 = a^2 \quad \text{oraz} \quad 11n + 4 = b^2.$$

Znajdź wszystkie liczby dziecięce.

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$n - 11 = 100n + 25 - (99n + 36) = 25a^2 - 9b^2 = (5a - 3b)(5a + 3b).$$

Aby liczba $n - 11$ była pierwsza potrzeba, by zachodziły warunki $5a + 3b = n - 11$ oraz $5a - 3b = 1$, gdyż $5a + 3b > 5a - 3b$. Dodając i odejmując od siebie te równości, dostajemy:

$$10a = n - 10 \quad \text{oraz} \quad 6b = n - 12,$$

czyli $10a + 10 = n$ oraz $6b + 12 = n$. Podstawiając pierwszą z tych zależności do pierwszej z danych w zadaniu równości, otrzymujemy $40a + 41 = a^2$, czyli równoważnie: $(a - 41)(a + 1) = 0$. Skoro $a > 0$, to musi zachodzić $a = 41$. Z tego wynika, że $n = 420$ oraz $b = 68$. Stąd jedyną liczbą dziecięcą jest 420.

Zadanie 22.

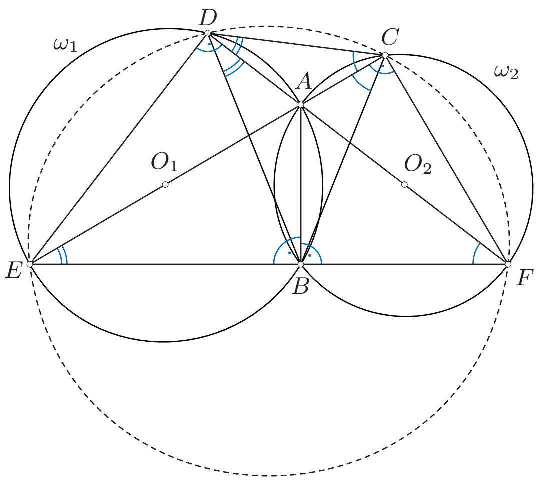
Okręgi ω_1 oraz ω_2 o środkach odpowiednio w punktach O_1 i O_2 przecinają się w punktach A oraz B. Prosta AO_1 przecina okrąg ω_2 w punkcie C różnym od punktu A. Prosta AO_2 przecina okrąg ω_1 w punkcie D różnym od punktu A. Udowodnij, że punkt A jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt BCD.

Rozwiązanie: Przedłużmy proste AO_1 i AO_2 tak, by przecinały odpowiednio okręgi ω_1 oraz ω_2 w punktach E oraz F, różnych od A. Kąty ABF, ABE, ACF oraz ADE są oparte na średnicach okręgów ω_1 oraz ω_2, więc są to kąty proste.

W konsekwencji punkty B, E, F są współliniowe oraz na czworokącie $EFCD$ można opisać okrąg. Korzystając z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym, uzyskujemy:

$$\sphericalangle DCA = \sphericalangle DFE = \sphericalangle AFB = \sphericalangle ACB.$$

Analogicznie otrzymujemy równości $\sphericalangle CDA = \sphericalangle CEF = \sphericalangle AEB = \sphericalangle ADB$. Zatem punkt A znajduje się na dwusiecznych kątów BCD oraz BDC, czyli jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt BCD.



rys. 9

Zadanie 23.

Dane są dodatnie liczby całkowite x i y, takie że liczba xy jest dzielnikiem liczby $x^2 + y^2 - x$. Wykaż, że x jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Niech $d = \mathrm{NWD}(x, y)$. Wtedy $x = da$ oraz $y = db$, gdzie a i b są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi. Wówczas podzielność zapisana w treści zadania oznacza, że następujący ułamek ma wartość całkowitą:

$$\frac{x^2 + y^2 - x}{xy} = \frac{d^2a^2 + d^2b^2 - da}{d^2ab} = \frac{da^2 + db^2 - a}{dab}.$$

W szczególności liczba $da^2 + db^2 - a$ jest podzielna przez d, a w konsekwencji liczba d jest dzielnikiem a. Liczba $da^2 + db^2 - a$ jest również podzielna przez a, co oznacza, że liczba a jest dzielnikiem db^2. Skoro jednak $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$, to liczba a jest dzielnikiem liczby d. W rezultacie $a = d$, czyli $x = d^2$.

Zadanie 24.

Dana jest dodatnia liczba całkowita $n > 1$. Dla jakich liczb rzeczywistych x wyrażenie $x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - x^{2n-3} + \ldots + x^2 - x + \frac{n}{4}$ przyjmuje wartość 0?

Rozwiązanie: Zauważmy, że dla dowolnej niedodatniej liczby rzeczywistej x oraz dla dowolnej liczby całkowitej $k > 0$ zachodzi nierówność $x^{2k} - x^{2k-1} \geqslant 0$. Wtedy

$$x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - x^{2n-3} + \ldots + x^2 - x + \frac{n}{4} \geqslant \frac{n}{4} > 0.$$

Gdy natomiast $x \geqslant 1$, to $x^a \geqslant x^b$ dla $a \geqslant b > 0$, więc znów dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k uzyskujemy $x^{2k} - x^{2k-1} \geqslant 0$. Zatem i w tym przypadku wartość rozważanego wyrażenia jest dodatnia.

Pozostaje rozważyć przypadek, gdy $0 \leqslant x \leqslant 1$. Wówczas dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k mamy $x^k \geqslant x^{2k-1}$, zatem

$$x^{2k} - x^{2k-1} + \frac{1}{4} \geqslant x^{2k} - x^k + \frac{1}{4} = \left(x^k - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Stąd otrzymujemy

$$x^{2n} - x^{2n-1} + \ldots + x^2 - x + \frac{n}{4} \geqslant \left(x^n - \frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Skoro $n > 1$, to nie wszystkie z tych kwadratów są zerami, więc powyższa suma jest dodatnia. Ostatecznie wyrażenie z treści zadania jest dodatnie dla wszystkich x, więc nigdy nie osiąga wartości 0.

Zadanie 25.

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\sphericalangle BCA = 90°$. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC oraz CA, przy czym

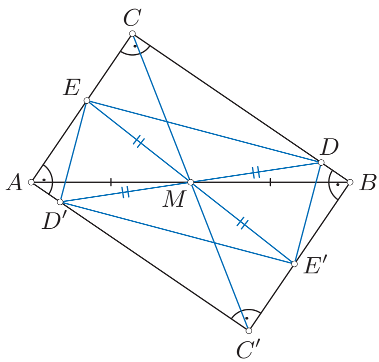
$$BD \cdot DC = CE \cdot EA.$$

Wykaż, że $DM = EM$.

Rozwiązanie: Rozważmy symetrię środkową względem punktu M. Punkt A przechodzi w niej na punkt B. Oznaczmy obrazy punktów C, D oraz E w tej symetrii odpowiednio jako C', D' i E'. Zauważmy, że czworokąt $AC'BC$ jest prostokątem. Przekształcając równość $BD \cdot DC = CE \cdot EA$, uzyskujemy

$$\frac{DC}{CE} = \frac{EA}{BD} = \frac{E'B}{BD}.$$

Wiemy również, że $\sphericalangle E'BD = \sphericalangle DCE = 90°$. Wynika stąd, że trójkąty prostokątne $E'BD$ oraz DCE są podobne (cecha bok–kąt–bok). Wnioskujemy stąd, że kąt EDE' jest prosty, więc czworokąt $DED'E'$ jest prostokątem o środku symetrii w punkcie M. Stąd $DM = EM$.



rys. 10

Zadanie 26.

Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω, w którym odcinki AC i BD są prostopadłe. Niech punkty E i F będą odbiciami punktu D odpowiednio względem prostych AB oraz BC. Prosta EF przecina krótsze łuki AB, AC okręgu ω odpowiednio w punktach X i Y. Udowodnij, że $BX = BY$.

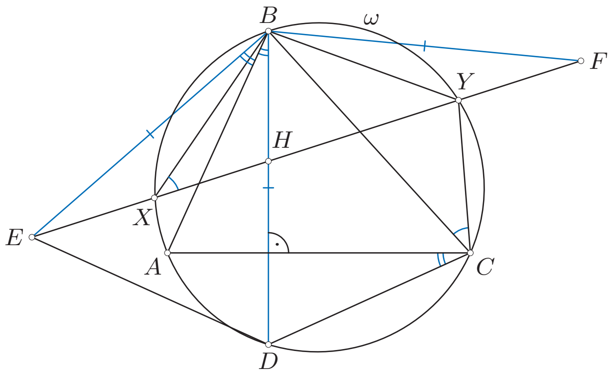
Rozwiązanie: Niech $\sphericalangle BXY = \alpha$ oraz $\sphericalangle BYX = \beta$. Teza zadania jest równoważna temu, że $\alpha = \beta$.

Niech też $\sphericalangle ABD = \gamma$, $\sphericalangle DBC = \delta$. Z twierdzenia o kątach wpisanych mamy

$$\sphericalangle BYC = 180^\circ - \sphericalangle BDC = 180^\circ - 90^\circ + \sphericalangle DCA = 180^\circ - 90^\circ + \sphericalangle ABD = 90^\circ + \gamma.$$

Zauważmy dalej, że

$$\begin{aligned} \sphericalangle CBY &= 180^\circ - \sphericalangle BCY - \sphericalangle BYC = 180^\circ - \sphericalangle BXY - 90^\circ - \gamma = 90^\circ - \alpha - \gamma, \\ \sphericalangle XBA &= \sphericalangle XBY - \sphericalangle ABY = 180^\circ - \sphericalangle BXY - \sphericalangle BYX - \sphericalangle ABY = \\ &= 180^\circ - \sphericalangle BXY - \sphericalangle BYX - (\sphericalangle CBY + \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC) \\ &= = 180^\circ - \alpha - \beta - ((90^\circ - \alpha - \gamma) - \gamma - \delta) = 90^\circ - \beta - \delta. \end{aligned}$$



rys. 11

Zauważmy, że prosta BF jest symetryczna do prostej BD względem prostej BC. Podobnie prosta BE jest symetryczna do prostej BD względem prostej BA. Proste AB i BC są symetralnymi odpowiednio odcinków DE i DF. Stąd

$$\sphericalangle EBA = \sphericalangle ABD = \gamma, \quad \sphericalangle DBC = \sphericalangle CBF = \delta \quad \text{oraz} \quad BE = BD = BF.$$

Zatem $\sphericalangle EBF = 2\gamma + 2\delta$. Zauważmy teraz, że z równości $BE = BF$ wynika

$$\sphericalangle BEF = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\gamma - 2\delta) = 90^\circ - \gamma - \delta.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \sphericalangle EBX &= 180^\circ - \sphericalangle BEX - \sphericalangle BXE = 180^\circ - \sphericalangle BEF - \sphericalangle BXE \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \gamma - \delta) - 180^\circ + \alpha = \alpha + \gamma + \delta - 90^\circ. \end{aligned}$$

Mamy jednak $\sphericalangle EBX + \sphericalangle XBA = \sphericalangle EBA = \gamma$. Uzyskujemy więc

$$\alpha + \gamma + \delta - 90^\circ + 90^\circ - \beta - \delta = \gamma,$$

czyli $\alpha - \beta = 0$. Zatem $\alpha = \beta$, skąd wnioskujemy równość $BX = BY$.

Zadanie 27.

Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n, takie że liczba $2^n - 1$ nie ma żadnego dzielnika pierwszego większego od 7.

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej m:

- $2^m - 1 \equiv 0 \pmod 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \equiv 0 \pmod 2$,
- $2^m - 1 \equiv 0 \pmod 5$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \equiv 0 \pmod 4$,
- $2^m - 1 \equiv 0 \pmod 7$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \equiv 0 \pmod 3$.

Zauważmy również, że jeśli p jest dzielnikiem pierwszym liczby n, wówczas liczba $2^p - 1$ jest dzielnikiem liczby $2^n - 1$. Wynika to z tego, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych x, y zachodzi równość

$$2^{xy} - 1 = (2^x)^y - 1 = (2^x - 1)(2^{x(y-1)} + 2^{x(y-2)} + \ldots + 1).$$

Zauważmy, że gdyby liczba n miała pewien dzielnik pierwszy $p \geqslant 5$, wówczas zgodnie z powyższym wzorem liczba $2^p - 1$ byłaby dzielnikiem liczby $2^n - 1$. Równocześnie jednak z wcześniejszych rozważań wynikałoby, że dzielniki pierwsze liczby $2^p - 1$ są większe niż 7, co nie jest możliwe, gdyż liczba $2^n - 1$ takich dzielników nie posiada.

Zatem szukana liczba n nie ma dzielników pierwszych większych od 5, czyli jest w postaci

$$n = 2^a 3^b,$$

gdzie a, b są dodatnimi liczbami całkowitymi. Zauważmy dalej, że skoro $2^8 - 1$ jest liczbą podzielną przez 17, to $a \leqslant 2$, oraz skoro $2^9 - 1$ jest liczbą podzielną przez 73, to $b \leqslant 1$. Pozostało rozpatrzenie liczb n równych 1, 2, 3, 4, 6 oraz 12. W ten sposób wykluczamy tylko przypadek, gdy $n = 12$:

$$2^1 - 1 = 1, \quad 2^2 - 1 = 3, \quad 2^3 - 1 = 7, \quad 2^4 - 1 = 15, \quad 2^6 - 1 = 63, \quad 2^{12} - 1 = 4095 = 13 \cdot 315.$$

W rezultacie szukane liczby n to 1, 2, 3, 4, 6.

Zadanie 28.

W pewnej szkole jest n dzieci, i funkcjonuje w niej k klubów F_1, F_2, ..., F_k. Każde dziecko należy do pewnej nieujemnej liczby z nich. Załóżmy, że żaden klub nie zawiera się w innym klubie, tzn. nie istnieje klub F_i, które wszyscy członkowie są w klubie F_j, dla pewnych $i \neq j$. Niech n_i oznacza liczbę osób z i-tego klubu. Udowodnij, że

$$\frac{1}{\binom{n}{n_1}} + \frac{1}{\binom{n}{n_2}} + \ldots + \frac{1}{\binom{n}{n_k}} \leqslant 1.$$

Rozwiązanie: Mnożąc obustronnie postulowaną nierówność przez $n!$, uzyskujemy

$$\frac{n!}{\binom{n}{n_1}} + \frac{n!}{\binom{n}{n_2}} + \ldots + \frac{n!}{\binom{n}{n_k}} \leqslant n!.$$

Zatem skoro

$$\frac{n!}{\binom{n}{n_i}} = \frac{n!}{\frac{n!}{n_i! \cdot (n-n_i)!}} = n_i! \cdot (n-n_i)!,$$

to pozostaje udowodnić nierówność

$$n_1! \cdot (n-n_1)! + n_2! \cdot (n-n_2)! + \ldots + n_k! \cdot (n-n_k)! \leqslant n!.$$

Rozważmy teraz wszystkie możliwe sposoby na ustawienie n dzieci w rzędzie. Z jednej strony jest ich oczywiście $n!$. Z drugiej strony, możemy rozważać jedynie te ustawienia, w których na pierwszych n_i miejscach znajdują się jedynie dzieci z klubu F_i. Nazwijmy zbiór tych ustawień przez U_i i zauważmy, że ma on dokładnie $n_i! \cdot (n-n_i)!$ elementów. Twierdzimy, że żadne dwa ze zbiorów U_1, U_2, ..., U_k nie mają wspólnego elementu.

Rzeczywiście, gdyby istniało ustawienie należące zarówno do zbioru U_i, jak i do zbioru U_j dla pewnych $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, oraz jeśli bez straty ogólności założymy, że $n_i \leqslant n_j$, to oznacza, że w ustawieniu tym fragment rzędu od miejsca 1 do miejsca n_i zawiera dzieci z obydwu klubów. W konsekwencji, wszystkie dzieci z klubu F_i musiałyby należeć do klubu F_j. To jest niemożliwe. Zatem zbiory U_i oraz U_j są rozłączne.

Zbiory $U_1, U_2, \ldots, U_k$ zawierają się w zbiorze wszystkich możliwych ustawień, których jest $n!$, zatem rozłączność zbiorów daje nierówność

$$|U_1| + |U_2| + \ldots + |U_k| \leqslant n!,$$

której potrzebowaliśmy do wywnioskowania tezy.

Zadanie 29.

Na okręgu umieszczono n liczb rzeczywistych, gdzie n jest liczbą całkowitą większą od 3. Dla każdych czterech kolejnych liczb a, b, c, d, położonych w tej kolejności na okręgu, zachodzi równość $a+d=b+c$. Dla jakich liczb n wynika stąd, że wszystkie liczby umieszczone na okręgu są równe?

Rozwiązanie: Wykażemy, że n liczb umieszczonych na okręgu jest równych wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą nieparzystą. Rzeczywiście, z jednej strony ustawiając na okręgu m par liczb 1, 2, 1, 2, ..., 1, 2, gdzie $m \geqslant 2$, uzyskamy układ $n = 2m$ liczb spełniających warunki zadania, które nie są równe.

Z drugiej strony, jeśli dla dowolnej dodatniej liczby nieparzystej $n > 3$ oznaczymy przez $a_1, \ldots, a_n$ liczby umieszczone w tej kolejności na okręgu, to

$$a_3 - a_1 = a_4 - a_2 = a_5 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-2} = a_1 - a_{n-1} = a_2 - a_n.$$

Jeśli uznamy liczbę k za wspólną różnicę w powyższych równościach, to:

$$a_1 + \ldots + a_n = (a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_1 + a_2) - kn,$$

skąd $k = 0$. W rezultacie $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = a_n = a_2 = a_4 = a_6 = \ldots = a_{n-1}$.

Zadanie 30.

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniające układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d = 20, \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd = 150. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = (a+b+c+d)^2 - 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) = 400-300 = 100.$$

Zatem

$$0 = 300-300 = 3(a^2+b^2+c^2+d^2) - 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) =$$

$$= (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2.$$

Suma kwadratów jest nieujemna wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie kwadraty są równe 0. Stąd $a=b=c=d$, a skoro sumują się do 20 to każde z nich musi być równe 5. Uzyskana czwórka liczb spełnia wyjściowy układ.

Zadanie 31.

Niech a, b, c będą niezerowymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek

$$|(a+b)(b+c)(c+a)| = |(a-b)(b-c)(c-a)|.$$

Wykaż, że

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right| \geqslant 1.$$

Rozwiązanie: Rozważymy dwa przypadki, wynikające z definicji wartości bezwzględnej. Jeżeli

$$(a+b)(b+c)(c+a) = -(a-b)(b-c)(c-a),$$

to wymnażając nawiasy, uzyskujemy

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc = a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2,$$

czyli $2ab^2+2bc^2+2ca^2+2abc=0$. Skoro $abc\neq 0$, to otrzymujemy:

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1=0.$$

W tym przypadku wnioskujemy zatem

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right| = 1.$$

Natomiast w przypadku równości

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a-b)(b-c)(c-a),$$

po wymnożeniu dostajemy (postępując jak wyżej) równość

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+1=0.$$

Zauważmy, że

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}-2\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right) = \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}-2.$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną mamy zatem

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}-2 \geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{c^2}{a^2}}-2=1.$$

Zadanie 32.

Dane jest n kart ustawionych w rzędzie, przy czym n jest dodatnią liczbą całkowitą. Każda karta ma jedną stronę białą, a drugą czarną. Ruch polega na wzięciu dwóch sąsiednich kart, z których lewa jest biała, a prawa może być czarna lub biała, i odwróceniu ich obydwu. Udowodnij, że niezależnie od początkowego ułożenia kart można wykonać tylko skończenie wiele ruchów.

Rozwiązanie: Przypiszmy białym stronom kart liczbę 1, a czarnym 0. Początkowe ustawienie tworzy pewną liczbę w zapisie binarnym. Zauważmy, że gdy wykonujemy operację podaną w zadaniu, zapisana liczba binarna zmniejsza się. Istotnie, jeśli $(k+1)$-wsza cyfra (od prawej) w zapisie binarnym liczby całkowitej równa jest 1, to gdy k-ta cyfra w zapisie tej liczby równa jest 1, wówczas zamiana cyfr 11 na 00 zmniejsza liczbę o $2^k + 2^{k-1}$. Jeśli natomiast k-ta cyfra w zapisie tej liczby równa jest 0, wówczas zamiana cyfr 10 na 01 zmniejsza liczbę o $2^k - 2^{k-1}$.

Skoro niezależnie od początkowego układu kart odpowiadająca mu liczba w zapisie binarnym jest skończona, to możliwe jest wykonanie tylko skończenie wielu ruchów.

Zadanie 33.

Na tablicy znajdują się liczby $1, 2, \ldots, n$, gdzie $n > 1$ jest dodatnią liczbą całkowitą. Dopóki na tablicy nie pozostanie jedna liczba, z tablicy wybierane są w kolejnych krokach pewne dwie liczby a i b, następnie liczby te są ścierane i w ich miejscu zapisana jest jedna liczba $\frac{ab}{a+b}$. Udowodnij, że po wykonaniu $n-1$ kroków liczba pozostała na tablicy jest mniejsza od $\frac{n+1}{2n}$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że po każdym kroku suma odwrotności liczb zapisanych na tablicy się nie zmienia, ponieważ:

$$\frac{1}{\frac{ab}{a+b}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Zatem odwrotność liczby X pozostałej na tablicy po $n-1$ krokach jest również równa sumie odwrotności liczb $1, 2, \ldots, n$, zapisanych na początku. Stąd

$$X = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}.$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną a harmoniczną uzyskujemy

$$X < \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Zadanie 34.

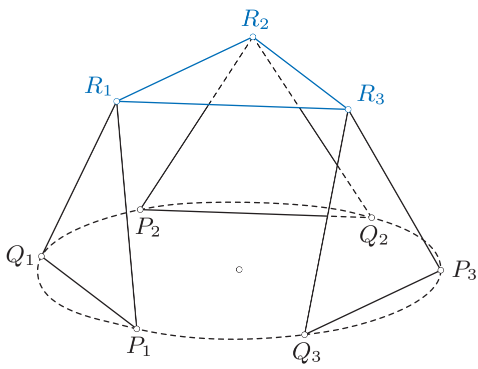
Każdy punkt w przestrzeni pomalowano na jeden z dwóch kolorów: kawowy lub herbaciany. Trójkąt nazwiemy *jednokolorowym*, jeśli ma trzy wierzchołki tego samego koloru. Czy istnieje jednokolorowy trójkąt równoboczny o boku długości 2023?

Rozwiązanie: Udowodnimy, ze istnieje jednokolorowy trójkąt równoboczny o boku długości 2023. Dowód przeprowadzimy nie wprost. Rozważmy dowolny trójkąt równoboczny o boku długości 2023. Jest jasne, że dwa jego wierzchołki są tego samego koloru, więc bez straty ogólności możemy założyć, że są one herbaciane.

Rozważmy wszystkie punkty tworzące trójkąt równoboczny ze wskazanymi dwoma punktami herbacianymi. Skoro zakładamy, że nie istnieje jednokolorowy trójkąt równoboczny, to punkty te są kawowe i tworzą okrąg ω o promieniu $\frac{2023\sqrt{3}}{2}$.

Na okręgu ω wybieramy trzy pary punktów (P_1, Q_1), (P_2, Q_2) oraz (P_3, Q_3) tak, aby $P_1Q_1 = P_2Q_2 = P_3Q_3 = 2023$ oraz tak, aby środki odcinków P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 tworzyły trójkąt równoboczny.

Dla każdej ze wskazanych trzech par (P_i, Q_i), gdzie $i = 1, 2, 3$, konstruujemy punkt R_i tak, by trójkąt $P_iQ_iR_i$ był równoboczny oraz żeby $R_1R_2R_3$ był trójkątem równobocznym o boku 2023. Możemy tak zrobić, gdy punkty R_1, R_2, R_3 wybierzemy tak, by płaszczyzny trójkątów równobocznych $P_iQ_iR_i$ były nachylone pod takim samym odpowiednim kątem do płaszczyzny okręgu ω.



rys. 12

Zauważmy, że punkty P_1, Q_1, P_2, Q_2 oraz P_3, Q_3 są kawowe, więc każdy z punktów R_1, R_2, R_3 musi być herbaciany, jeśli ma nie istnieć jednokolorowy trójkąt. To jednak oznacza, że trójkąt $R_1R_2R_3$ jest jednokolorowy, co daje sprzeczność.

Zadanie 35.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC > BC$. Niech punkt M będzie środkiem tego łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC, który zawiera punkt C. Niech punkt H będzie rzutem prostopadłym punktu M na prostą AC. Wykaż, że

$$AH = HC + CB.$$

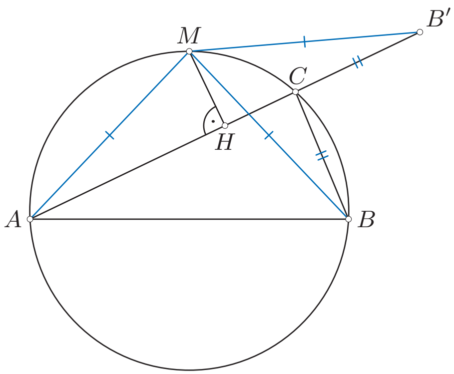
Rozwiązanie: Oznaczmy przez B' punkt powstający w wyniku odbicia punktu B względem prostej CM. Skoro punkt M jest środkiem łuku AB zawierającego punkt C, to

$$\sphericalangle MCA = \sphericalangle MBA = \sphericalangle MAB = 180^\circ - \sphericalangle MCB,$$

więc CM jest dwusieczną zewnętrzną kąta ACB. Wynika stąd, że punkt B' leży na prostej AC.

Skoro M jest środkiem łuku, to $AM = BM$. Z symetrii względem prostej CM mamy też $BM = B'M$. Stąd trójkąt AMB' jest równoramienny. Prosta MH jest więc zarazem wysokością i środkową w trójkącie AMB'. Stąd

$$AH = HB' = HC + CB' = HC + CB.$$



rys. 13

Zadanie 36.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ wpisany w okrąg o środku O. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P, a proste BC i AD przecinają się w punkcie Q. Okręgi opisane na trójkątach CDQ oraz BCP przecinają się w punkcie R, różnym od punktu C. Wykaż, że punkty A, O, C oraz R leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że punkty P, Q, R są współliniowe. Rzeczywiście, z warunku opisywalności okręgu na czworokącie mamy

$$\sphericalangle QRC = \sphericalangle ADC = \sphericalangle PBC = 180^\circ - \sphericalangle CRP.$$

Zauważmy dalej, że na czworokącie $ABRQ$ można opisać okrąg, ponieważ

$$\sphericalangle QAB = \sphericalangle DAB = \sphericalangle BCP = \sphericalangle BRP.$$

W ostatniej równości korzystaliśmy z twierdzenia o kącie wpisanym. Zauważmy wreszcie, że

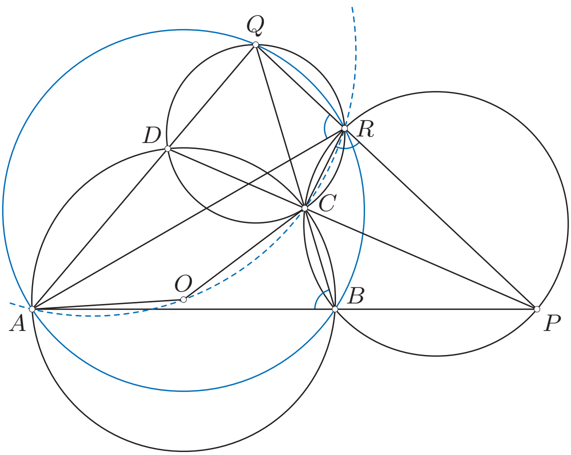
$$\sphericalangle ARQ = \sphericalangle ABQ = 180^\circ - \sphericalangle CBP = \sphericalangle CRP.$$

Załóżmy najpierw, że te kąty są ostre. Wtedy, korzystając twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym, uzyskujemy

$$\begin{aligned}\sphericalangle ARC &= 180^\circ - \sphericalangle ARQ - \sphericalangle CRP = 180^\circ - 2\sphericalangle ABQ\\ &= 180^\circ - 2\sphericalangle ABC = 180^\circ - \sphericalangle AOC.\end{aligned}$$

Punkty A, O, C i R leżą zatem na jednym okręgu.

W przypadku gdy kąty $\sphericalangle ARQ = \sphericalangle CRP$ są rozwarte, podobne obliczenie na kątach daje tezę.



rys. 14

Zadanie 37.

Dany jest trójkąt różnoboczny ABC. Niech punkty D, E i F będą spodkami wysokości tego trójkąta opuszczonych odpowiednio z punktów A, B i C. Oznaczmy odpowiednio przez X, Y, Z punkty przecięcia par prostych: AB i DE, AC i DF oraz BC i EF. Udowodnij, że punkty X, Y, Z są współliniowe.

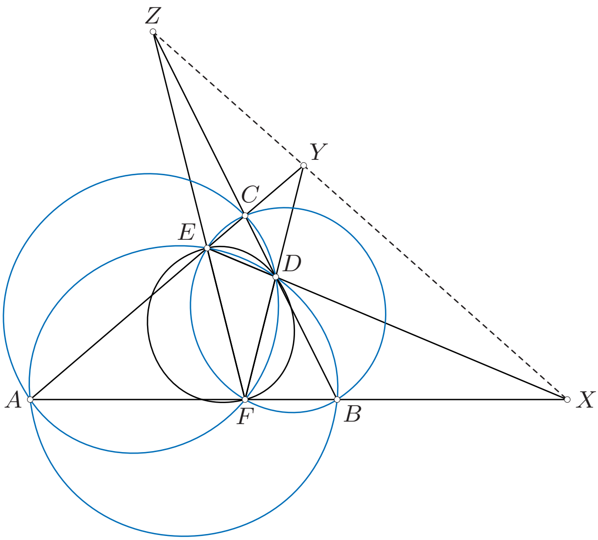
Rozwiązanie: Oznaczmy okręgi opisane na trójkątach ABC i DEF odpowiednio jako Ω oraz ω. Z równości

$$\sphericalangle AFC = \sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB = \sphericalangle AEB = \sphericalangle CEB = \sphericalangle CFB = 90^\circ$$

wynika, że na czworokątach $ABDE$, $ACDF$ oraz $BCEF$ można opisać okręgi, które oznaczamy odpowiednio przez ω_3, ω_2 oraz ω_1.

Zauważmy, że proste BC oraz EF są osiami potęgowymi odpowiednio par okręgów: ω_1, Ω oraz ω_1, ω. Potęga punktu Y względem okręgów Ω, ω, jest zatem taka sama, więc Y leży na ich osi potęgowej.

Analogicznie udowadniamy, że punkty X oraz Z. leżą na osi potęgowej okręgów Ω oraz ω, a co za tym idzie punkty X, Y, Z są współliniowe.



rys. 15

Zadanie 38.

Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Załóżmy, że również liczby

$$\frac{a+b}{c}, \quad \frac{b+c}{a}, \quad \frac{c+a}{b}$$

są całkowite dodatnie. Znajdź wszystkie możliwe wartości liczby

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}.$$

Rozwiązanie: Z założenia zadania wynika, że liczby a, b i c są dzielnikami liczby $a+b+c$. Istotnie, liczba a jest dzielnikiem liczby $b+c$, więc jest także dzielnikiem $a+b+c$, itd. Istnieją więc dodatnie liczby całkowite k, l oraz m, że

$$a+b+c = ak = bl = cm.$$

Teraz rozważana w zadaniu suma wynosi

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{a+b+c}{c} + \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} - 3 = k + l + m - 3,$$

a wiemy że

$$a+b+c = \frac{a+b+c}{k} + \frac{a+b+c}{l} + \frac{a+b+c}{m},$$

czyli

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = 1.$$

Wystarczy zatem znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite k, l, m spełniające powyższą równość. Bez straty ogólności możemy założyć, że $k \leqslant l \leqslant m$. Wówczas największy ze składników powyższej sumy spełnia $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{3}$, gdyż suma dodatnich składników powyższej sumy jest równa 1. Uzyskujemy zatem dwa przypadki.

- Gdy $k = 3$, wówczas
  $$\frac{2}{3} = \frac{1}{l} + \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$
  co implikuje równość $l = m = 3$.
- Gdy $k = 2$, wówczas $l > 2$, gdyż $\frac{1}{m} \neq 0$. Dla $l \geqslant 5$ uzyskujemy
  $$\frac{1}{2} = \frac{1}{l} + \frac{1}{m} \leqslant \frac{2}{5},$$
  co daje sprzeczność. Mamy więc dwa szczególne przypadki. Gdy $l = 4$, wówczas $m = 4$. Gdy zaś $l = 3$, wówczas $m = 6$.

Wartości $k + l + m - 3$ w powyższych przypadkach wynoszą 6, 7, 8. Nietrudno znaleźć trójki (a, b, c) dla których suma z treści zadania przyjmuje te wartości — choćby $(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3)$.

Zadanie 39.

Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą $n > 9$, której zapis dziesiętny nie zawiera cyfry 0 ani 7, ale zamiana dowolnej cyfry liczby n na cyfrę 7 daje liczbę podzielną przez 7.

Przykład. Liczba 143 nie ma własności opisanej w zadaniu. Mimo, że liczba 147 jest podzielna przez 7, to liczba 173 nie jest podzielna przez 7.

Rozwiązanie: Zapiszmy liczbę n w postaci $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$, gdzie a_0, a_1, ... , a_k są cyframi w zapisie dziesiętnym liczby n. Operacja wymiany cyfry a_m na cyfrę 7 w zapisie liczby n prowadzi do uzyskania liczby

$$n - a_m \cdot 10^m + 7 \cdot 10^m.$$

Zatem warunek z zadania jest równoważny temu, że dla każdej całkowitej liczby m od 0 do k liczba $n - a_m \cdot 10^m$ jest podzielna przez 7. To natomiast oznacza że 7 dzieli $n - a_0$ i że wszystkie $a_m \cdot 10^m$ dają taką samą resztę z dzielenia przez 7, czyli

$$a_0 \equiv 3a_1 \equiv 3^2 a_2 \equiv \dots \equiv 3^k a_k \pmod 7.$$

Zauważmy, że $5 \cdot 3 \equiv 1 \pmod 7$, więc $a_m \equiv 5^m a_0 \pmod 7$. Zatem

$$n \equiv a_0 + 50a_0 + 50^2 a_0 + \dots + 50^k a_0 \equiv (k+1)a_0 \pmod 7.$$

Skoro jednak $n - a_0 \equiv 0 \pmod 7$, to $a_0 k \equiv 0 \pmod 7$. Cyfra a_0 nie jest równa 0 ani 7, więc liczba k jest podzielna przez 7. Stąd liczba n ma co najmniej 8 cyfr.

Zgodnie z powyższym rozumowaniem każda liczba ośmiocyfrowa zaczynająca się na 1 spełniająca warunek z zadania musi spełniać

$$a_7 = 1,\ a_6 = 3,\ a_5 = 2,\ a_4 = 6,\ a_3 = 4,\ a_2 = 5,\ a_1 = 1,\ a_0 = 3,$$

więc jedynym możliwym takim n jest 13264513. Aby stwierdzić że jest to najmniejsze możliwe n pozostaje sprawdzić, że ta liczba spełnia warunek z zadania, czyli że $n - a_0$ jest podzielne przez 7. To już nietrudno zrobić ręcznym obliczeniem.