



Zestaw 2

1. Dana jest taka liczba rzeczywista, której rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone i składa się wyłącznie z cyfr 1, 2 i 3. Wykaż, że jeżeli w tym rozwinięciu jest co najwyżej 2010 jedynek i co najwyżej 2010 dwójek, to dana liczba jest wymierna.

Wskazówka

Przedstaw daną liczbę w postaci sumy dwóch liczb. Pierwsza z tych liczb ma rozwinięcie dziesiętne, w którym są wszystkie jedynek i wszystkie dwójki oraz pewna liczba trójek, a w rozwinięciu drugiej występują już tylko same trójki.

2. W trójkąt ostrokątny ABC o polu S wpisano kwadrat $KLMN$ o polu P w taki sposób, że punkty K i L leżą na boku AB , a punkty M i N leżą odpowiednio na bokach BC i CA . Oblicz sumę długości boku AB i wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C .

Wskazówka

Skorzystaj z podobieństwa trójkątów ABC i NMC .

3. Rozstrzygnij, czy istnieją parami różne liczby pierwsze p , q , r , dla których liczba

$$\frac{(p+q)(q+r)(r+p)}{pqr}$$

jest liczbą całkowitą.

Wskazówka

Skorzystaj z tego, że jeżeli istnieją liczby spełniające warunki zadania, to najmniejsza z nich dzieli sumę dwóch pozostałych.

4. Dany jest sześcian $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, w którym odcinek AC_1 jest jego główną przekątną. Wykaż, że jeżeli punkt P , różny od punktów A i C_1 , leży na powierzchni tego sześcianu, to trójkąt APC_1 jest prostokątny lub rozwartokątny.

Wskazówka

Zbadaj dwa przypadki:

- (1) punkt P jest wierzchołkiem sześcianu,
- (2) punkt P nie jest wierzchołkiem sześcianu.

5. Na okręgu napisano n liczb rzeczywistych w taki sposób, że każda z tych liczb jest równa wartości bezwzględnej różnicy dwóch liczb stojących bezpośrednio za nią (patrząc zgodnie z ruchem wskazówek zegara).

a) Znajdź te liczby, jeśli $n = 2010$ a ich suma jest równa 1340.

b) Znajdź sumę tych liczb, jeśli $n = 1000$.

Wskazówka

Wykaż, że wszystkie napisane liczby są nieujemne. Jeśli x jest największą z nich, to jakie liczby mogą sąsiadować z x ?

6. Dany jest taki wypukły pięciokąt $ABCDE$, że czworokąt $ABDE$ jest prostokątem. Wykaż, że $[ABCDE] < 2 \cdot [ACE]$.

Uwaga. Symbolem $[\mathcal{F}]$ oznaczamy pole figury \mathcal{F} .

Wskazówka

Zbuduj prostokąt $APQE$, w którym bok PQ jest równoległy do boku AE i taki, że punkt C należy do boku PQ tego prostokąta. Jak jest zależność między $[APQE]$ i $[ACE]$?

7. Rozstrzygnij, ile jest wszystkich par (x, y) liczb naturalnych sześciocyfrowych, spełniających następujące warunki:

1° wszystkie cyfry liczb x i y są różne od zera,

2° liczba y powstaje przez przestawienie cyfr liczby x ,

3° $x + y = 1000000$.

Odpowiedź uzasadnij.

Wskazówka

Wykaż, że jeżeli istnieją liczby x i y spełniające warunki zadania, to suma cyfr jedności tych liczb jest równa 10, a suma cyfr zapisanych w pozostałych rzędach zapisu dziesiętnego liczb x i y jest równa 9.