



Zestaw 4

1. Znajdź wszystkie rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x^2 = y + z \\ y^2 = z + x \\ z^2 = x^2 + y^2. \end{cases}$$

2. Czy istnieje taka całkowita dodatnia liczba n , że $2n$ jest kwadratem liczby całkowitej, zaś $1024n$ jest czwartą potęgą liczby całkowitej? Odpowiedź uzasadnij.

3. Na okręgu umieszczono 2010 punktów białych i 1 punkt czerwony. Rozpatrujemy wszystkie możliwe wielokąty o wierzchołkach w tych punktach. Których wielokątów jest więcej: mających czerwony wierzchołek, czy mających tylko białe wierzchołki? Odpowiedź uzasadnij.

4. W okręgu poprowadzono trzy cięciwy: AB , BC oraz CD . Niech punkty K , L oraz M będą odpowiednio środkami tych cięciw. Wykaż, że

$$\sphericalangle BKL = \sphericalangle CML.$$

5. Dane są dodatnie liczby naturalne a i b . Udowodnij, że jeśli $a \cdot b$ jest liczbą parzystą, to istnieją takie dodatnie liczby naturalne c i d , że

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2,$$

a jeśli $a \cdot b$ jest liczbą nieparzystą, to takie liczby c i d nie istnieją.

6. Udowodnij, że nie istnieje wielościan mający dokładnie 7 krawędzi.

7. Niech a będzie liczbą naturalną mającą 2010 cyfr i podzielną przez 9. Sumę cyfr tej liczby oznaczmy przez A , sumę cyfr liczby A oznaczmy przez B , sumę cyfr liczby B oznaczmy przez C . Wyznacz liczbę C .