Zestaw 7

1. Liczby a, b, c spełniają warunki:

(1) $a+b+c=20$,

(2) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{1}{4}$.

Obliczyć wartość wyrażenia

$$w=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

2. Wyznaczyć wszystkie pary (x,y) liczb rzeczywistych spełniające równanie

$$(x^4+1)(4y^4+1)=8x^2y^2.$$

3. Niech p i q będą dwiema kolejnymi liczbami pierwszymi większymi od 2. Udowodnić, że liczba $p+q$ jest iloczynem co najmniej trzech (niekoniecznie różnych) liczb naturalnych większych od 1.

4. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunki:

(1) $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$,

(2) $a+b+c+d\geqslant 1$.

Wykazać, że prawdziwa jest nierówność

$$a^2+3b^2+5c^2+7d^2\geqslant 1.$$

5. W trójkąt ostrokątny ABC wpisano kwadrat tak, że dwa jego wierzchołki należą do boku AB, a dwa pozostałe do pozostałych boków trójkąta. Udowodnić, że pole tego kwadratu nie przekracza połowy pola trójkąta ABC.

6. Danych jest 70 różnych liczb całkowitych dodatnich, wśród których nie ma liczb większych od 200. Wykazać, że przynajmniej dwie z nich różnią się o 4 lub o 5, lub o 9.

7. Wykazać, że w każdym czworościanie istnieją takie trzy krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka, z których można zbudować trójkąt.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego