Zestaw 7

1. Liczby a, b, c spełniają warunki:

(1) $a+b+c=20$,

(2) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{1}{4}$.

Obliczyć wartość wyrażenia

$$w=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

Wskazówka

Rozpatrz iloczyn $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right)$.

2. Wyznaczyć wszystkie pary (x,y) liczb rzeczywistych spełniające równanie

$$(x^4+1)(4y^4+1)=8x^2y^2.$$

Wskazówka

Sposób 1.

Z nierówności $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ między średnią arytmetyczną i geometryczną dla dwóch liczb nieujemnych a i b, otrzymujemy

$$\frac{x^4+1}{2}\geqslant x^2 \quad \text{i} \quad \frac{4y^4+1}{2}\geqslant 2y^2.$$

Kiedy w tych nierównościach zachodzą równości?

Sposób 2.

Zauważ, że

$$(x^4+1)(4y^4+1)-8x^2y^2=4x^4y^4+x^4+4y^4+1-8x^2y^2=(x^2-2y^2)^2+(2x^2y^2-1)^2.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Eurpejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. Niech p i q będą dwiema kolejnymi liczbami pierwszymi większymi od 2. Udowodnić, że liczba $p+q$ jest iloczynem co najmniej trzech (niekoniecznie różnych) liczb naturalnych większych od 1.

Wskazówka

Zauważ, że jeśli p i q są dwiema kolejnymi liczbami pierwszymi nieparzystymi, to liczba $\frac{p+q}{2}$ jest liczbą złożoną.

4. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunki:

(1) $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$,

(2) $a+b+c+d \geqslant 1$.

Wykazać, że prawdziwa jest nierówność

$$a^2+3b^2+5c^2+7d^2 \geqslant 1.$$

Wskazówka

Z nierówności $a+b+c+d \geqslant 1$ wynika, że

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd \geqslant 1,$$

a dalej skorzystaj z warunku $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$.

5. W trójkąt ostrokątny ABC wpisano kwadrat tak, że dwa jego wierzchołki należą do boku AB, a dwa pozostałe do pozostałych boków trójkąta. Udowodnić, że pole tego kwadratu nie przekracza połowy pola trójkąta ABC.

Wskazówka

Przyjmując, że $AB = c$, oraz h — długość wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C, oblicz długość boku kwadratu wpisanego w ten trójkąt zgodnie z warunkami zadania. Następnie skorzystaj z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną dla dwóch liczb dodatnich lub zbadaj różnicę między połową pola trójkąta ABC i polem wpisanego kwadratu.

6. Danych jest 70 różnych liczb całkowitych dodatnich, wśród których nie ma liczb większych od 200. Wykazać, że przynajmniej dwie z nich różnią się o 4 lub o 5, lub o 9.

Wskazówka

Oznaczmy dane liczby a_1, a_2, a_3, …, a_{70}. Rozpatrz liczby

$$\begin{aligned} &a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{70}, \\ (1) \qquad &a_1+4, a_2+4, a_3+4, \ldots, a_{70}+4, \\ &a_1+9, a_2+9, a_3+9, \ldots, a_{70}+9. \end{aligned}$$

Gdyby wśród liczb a_1, a_2, a_3, ..., a_{70} nie było liczb różniących się o 4 lub o 5, lub o 9, to największa spośród wypisanych w (1) 210 różnych liczb naturalnych nie przekraczałaby 209.

7. Wykazać, że w każdym czworościanie istnieją takie trzy krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka, z których można zbudować trójkąt.

Wskazówka

Niech AB będzie najdłuższą krawędzią czworościanu $ABCD$. Wtedy każda z pozostałych krawędzi ma długość nie większą od AB. Zauważ, że zachodzą nierówności

$$AC+BC>AB \quad \text{i} \quad AD+BD>AB.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Eurpejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego