Zestaw 9

1. Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb całkowitych spełniających układ równań

$$\begin{cases} ab+c=2011 \\ a+bc=2012. \end{cases}$$

Wskazówka

Odejmując stronami równania danego układu, otrzymujemy

$$a-ab+bc-c=1,$$

stąd

$$(a-c)(1-b)=1.$$

Jak można przedstawić liczbę 1 jako iloczyn dwóch liczb całkowitych?

2. Wysokości AA_1, BB_1, CC_1 trójkąta ostrokątnego ABC przecinają się w punkcie H. Wykaż, że jeżeli $HA_1=HB_1=HC_1$, to trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym.

Wskazówka

Wykaż, że trójkąty BHA_1 i BHC_1 są przystające. Stąd $\sphericalangle HBA_1=\sphericalangle HBC_1$. Uzyskany fakt oznacza, że odcinek BB_1 jest dwusieczną kąta $\sphericalangle ABC$. Jaki stąd wniosek o bokach AB i BC?

3. Liczby x, y, z są takimi liczbami rzeczywistymi, że $(x+y)(y+z)(z+x)\neq 0$. Wykaż, że prawdziwa jest równość

$$\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}+\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{y-z}{y+z}\cdot\frac{z-x}{z+x}=0.$$

Wskazówka

Wystarczy sprowadzić wszystkie ułamki do wspólnego mianownika

$$(x+y)(y+z)(z+x)$$

i na wspólną kreskę ułamkową, a następnie wykonać działania na wyrażeniach algebraicznych w liczniku otrzymanego ułamka.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Eurpejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. Dane są liczby

$$A=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1} \quad \text{oraz} \quad B=\frac{2}{xy+1},$$

gdzie x i y są takimi liczbami rzeczywistymi, że $x \neq y$ i $xy+1 \neq 0$. Wyznacz $A+B$, jeśli wiadomo, że $A=B$.

Wskazówka

Z warunków $A=B$ oraz $xy+1 \neq 0$, po przekształceniach równoważnych, otrzymujemy

$$(xy+1)(y^2+1)+(xy+1)(x^2+1)=2(x^2+1)(y^2+1).$$

Wykaż, że ostatnią równość można zapisać w postaci

$$(x-y)^2(xy-1)=0.$$

5. Dany jest czworokąt wypukły, którego kolejne boki mają długości: 48, 49, 51, 52. Wykaż, że suma długości przekątnych tego czworokąta jest większa od 100.

Wskazówka

Przyjmij, że dany jest czworokąt $ABCD$, w którym: $AB=48$, $BC=49$, $CD=51$ i $DA=52$. Niech ponadto punkt O będzie punktem przecięcia się przekątnych AC i BD tego czworokąta. Wystarczy teraz zastosować nierówność trójkąta dla trójkątów: ABO, BCO, CDO i DAO.

6. Dany jest prostopadłościan o podstawach $ABCD$ i $EFGH$. Płaszczyzna przecina jego krawędzie boczne AE, BF, CG i DH odpowiednio w punktach M, N, P i Q. Wykaż, że

$$AM+CP=BN+DQ.$$

Wskazówka

Zauważ, że czworokąt $MNPQ$ jest równoległobokiem. Niech odcinki MP i NQ przecinają się w punkcie O_1, a przekątne podstawy $ABCD$ — w punkcie O. Jakim odcinkiem jest odcinek OO_1 dla czworokątów $ACPM$ i $BNQD$?

7. Na tablicy napisano liczby: 1, 2, 4, 5. Operacja polega na wybraniu dwóch liczb a i b — spośród napisanych na tablicy — i zastąpieniu ich liczbami $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ i $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Czy po pewnej liczbie takich operacji można otrzymać na tablicy liczby: 1, $2\sqrt{2}$, 3, $4\sqrt{2}$? Odpowiedź uzasadnij.

Wskazówka

Zauważ, że

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{2}+\frac{a^2-2ab+b^2}{2}=a^2+b^2.$$

Jaka jest suma kwadratów czterech liczb zapisanych na tablicy przed operacją i po operacji?

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Eurpejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego