Matematyczna Olimpiada Juniorów www.omj.edu.pl

Kwadrat

Nr 20
wrzesień 2017
ISSN 2300-0708

Gazetka Olimpiady Matematycznej Juniorów

Między kwadratami

W niektórych zadaniach olimpijskich należy stwierdzić, czy liczba pewnej postaci może być kwadratem liczby całkowitej. Jedną z metod, która pozwala udzielić negatywnej odpowiedzi jest zauważenie, że liczba danej postaci jest zawarta między kwadratami dwóch kolejnych liczb całkowitych — wtedy nie może być kwadratem liczby całkowitej. Spójrzmy na przykłady.

Zadanie 1.

Wykaż, że nie istnieje dodatnia liczba całkowita n, dla której liczba n^2+n+1 jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzą nierówności

$$n^2 < n^2+n+1 < n^2+2n+1 = (n+1)^2 .$$

Jeśli zatem $n^2+n+1=k^2$ dla pewnej dodatniej liczby k, to $n<k<n+1$. Stąd wniosek, że liczba k nie jest całkowita, a co za tym idzie liczba n^2+n+1 nie może być kwadratem liczby całkowitej. To kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 2.

Udowodnij, że nie istnieje dodatnia liczba całkowita n, dla której liczba n^2+3n+1 jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzą nierówności

$$(n+1)^2 = n^2+2n+1 < n^2+3n+1 < n^2+4n+4 = (n+2)^2 .$$

Stąd wniosek, że liczba n^2+3n+1 nie może być kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 3. (X OMG, zawody III stopnia)

Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b, że liczby

$$a^2+2b+1 \quad \text{oraz} \quad b^2+2a+1$$

są kwadratami liczb naturalnych. Wykaż, że $a=b$.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że liczby a i b są różne. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $a>b$. Wtedy mamy

$$a^2 < a^2+2b+1 < a^2+2a+1 = (a+1)^2 .$$

Wobec tego liczba a^2+2b+1 nie może być kwadratem liczby całkowitej. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $a=b$, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 4.

Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których liczba n^4+2n^3-3 jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Dla $n=1$ dana liczba jest równa 0, więc jest kwadratem liczby całkowitej. Dla $n>1$ mamy

$$(n^2+(n-1))^2 = n^4+2n^2(n-1)+(n-1)^2 = \\ = n^4+2n^3-n^2-2n+1 < n^4+2n^3-3 ,$$

gdyż $n^2+2n \geqslant 2^2+2\cdot 2 > 4$. Ponadto

$$n^4+2n^3-3 < n^4+2n^3+n^2 = (n^2+n)^2.$$

W takim razie dla $n>1$ zachodzą nierówności

$$(n^2+n-1)^2 < n^4+2n^3-3 < (n^2+n)^2,$$

co oznacza, że dana w treści zadania liczba nie może być kwadratem liczby całkowitej.

Ostatecznie otrzymujemy, że dana liczba jest kwadratem liczby całkowitej jedynie dla $n=1$, co kończy rozwiązanie zadania.

Jak nietrudno się domyślić, metodę „wrzucania między kwadraty” można także zastosować dla innych potęg, np. dla sześcianów.

Zadanie 5.

Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych, dla których spełnione jest równanie $x^3=y^3+2y^2+1$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$y^3+2y^2+1 = y^3+3y^2+3y+1-y^2-3y = (y+1)^3-y(y+3).$$

Dla dowolnej liczby y zachodzi nierówność

$$y^3 < y^3+2y^2+1 = x^3.$$

Ponadto jeśli $y \leqslant -4$ lub $y>0$, to

$$x^3 = (y+1)^3-y(y+3) < (y+1)^3,$$

gdyż liczba $y(y+3)$ jest dodatnia. W takim razie

$$y^3 < x^3 < (y+1)^3 ,$$

a więc dane w zadaniu równanie nie ma w tym przypadku rozwiązań w liczbach całkowitych.

Pozostał nam do rozpatrzenia przypadek, gdy y jest jedną z liczb -3, -2, -1, 0. Podstawiając kolejno te wartości do danego równania, stwierdzamy, że:

- jeśli $y=-3$, to $x^3=-8$, czyli $x=-2$;
- jeśli $y=-2$, to $x^3=1$, czyli $x=1$;
- jeśli $y=-1$, to $x^3=2$, co nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych;
- jeśli $y=0$, to $x^3=1$, czyli $x=1$.

Ostatecznie otrzymujemy trzy pary (x,y) spełniające dane równanie:

$$(-2,-3), \quad (1,-2), \quad (1,0).$$

Na koniec proponujemy Czytelnikom kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Zadanie 6.

Wykaż, że nie istnieje dodatnia liczba całkowita n, dla której liczba $n^2+9n+20$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 7.

Wyznacz wszystkie pary (x,y) dodatnich liczb całkowitych, dla których liczby

$$x^2+4y \quad \text{oraz} \quad y^2+4x$$

są kwadratami liczb całkowitych.

Zadanie 8.

Wyznacz wszystkie pary (x,y) dodatnich liczb całkowitych, dla których $x^2=y^4+y^2+y+1$.

Zadanie 9. (LXIV OM, zawody III stopnia)

Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych x, y, dla których $x^4+y=x^3+y^2$.

Zadanie 10. (LXVIII OM, zawody I stopnia)

Dane są liczby całkowite a, b, c. Udowodnij, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba

$$n^3+an^2+bn+c$$

nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Michał Kieza

Dorysujmy równoległobok

W niektórych konfiguracjach geometrycznych pojawiają się zależności metryczne, np. równości kątów lub odcinków, które pozornie nie mają ze sobą nic wspólnego. Warto wtedy spróbować *przenieść* odpowiednie wielkości w inne miejsca rysunku, aby powiązać ze sobą dane zależności.

Dobrym narzędziem do *przenoszenia* odcinków i kątów w inne miejsca rysunku jest symetria środkowa. Często odbicie jednego punktu względem innego stanowi istotny krok w kierunku rozwiązania zadania. To sprowadza się do narysowania *równoległoboku*.

W następującym twierdzeniu ujętych jest kilka wygodnych charakteryzacji równoległoboku.

Twierdzenie

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ (rys. 1). Następujące warunki są równoważne (tzn. z każdego z poniższych warunków wynikają wszystkie pozostałe):

(a) $ABCD$ ma środek symetrii;
(b) odcinki AC i BD mają wspólny środek;
(c) $AB=CD$ oraz $AD=BC$;
(d) $AB=CD$ oraz $AB \parallel CD$;
(e) $AB \parallel CD$ oraz $AD \parallel BC$.

Nietrudny dowód można przeprowadzić w oparciu o cechy przystawania trójkątów. Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do książeczki Waldemara Pompe *Wokół obrotów, przewodnik po geometrii elementarnej*, Wydawnictwo Szkolne OMEGA (twierdzenie 4.1).

Zadanie 1.

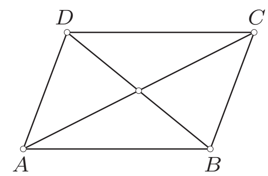
Wewnątrz czworokąta $ABCD$ znajduje się taki punkt P, że $AP=BP$, $CP=DP$, $\sphericalangle APB=\sphericalangle CPD=90^\circ$. Wykaż, że trójkąty APD oraz BPC mają równe pola.

Rozwiązanie

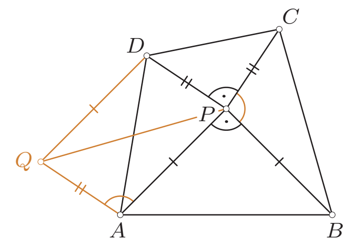
Oznaczmy przez Q taki punkt, że czworokąt $APDQ$ jest równoległobokiem (rys. 2). Wtedy $AQ=DP=CP$, a ponadto $AP=BP$ oraz

$$\sphericalangle PAQ=180^\circ-\sphericalangle APD=\sphericalangle BPC,$$

skąd wniosek, że trójkąty PAQ oraz BPC są przystające (cecha bok–kąt–bok). W szczególności trójkąty te mają równe pola. Co więcej, trójkąty PAQ oraz APD także mają równe pola, gdyż czworokąt $APDQ$ jest równoległobokiem. To kończy rozwiązanie zadania.



rys. 1



rys. 2

W zadaniu 1 mieliśmy do udowodnienia równość pól trójkątów o równych podstawach AP i BP. Stąd pomysł przemieszczenia jednego z nich tak, aby podstawy się pokryły. Okazało się, że powstał w ten sposób równoległobok $APDQ$, od którego mogliśmy rozpocząć rozumowanie.

Zadanie 2. (Facebookowa Liga OMG, zadanie 12.)

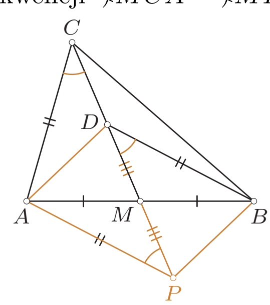
Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC. Na odcinku CM znajduje się taki punkt D, że $AC=BD$. Wykaż, że $\sphericalangle MCA=\sphericalangle MDB$.

Rozwiązanie

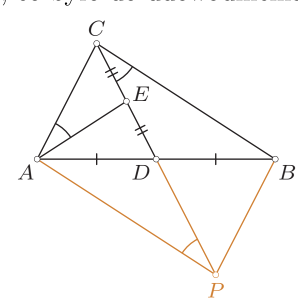
Oznaczmy przez P punkt symetryczny do punktu D względem punktu M (rys. 3), czyli taki punkt płaszczyzny, że czworokąt $ADBP$ jest równoległobokiem. Stąd dostajemy równości

$$BD=AP \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle MDB=\sphericalangle MPA.$$

W połączeniu z założeniem $AC=BD$ uzyskujemy więc $AC=AP$. Stąd wniosek, że $\sphericalangle MCA=\sphericalangle MPA$ i w konsekwencji $\sphericalangle MCA=\sphericalangle MDB$, co było do udowodnienia.



rys. 3



rys. 4

Rozwiążemy teraz innym sposobem zadanie przywołane w poprzednim numerze *Kwadratu*.

Zadanie 3. (IX OMG, zawody II stopnia)

W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB, a punkt E jest środkiem odcinka CD. Wykaż, że jeżeli $\sphericalangle CAE=\sphericalangle BCD$, to $AC=CD$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez P punkt symetryczny do punktu C względem punktu D (rys. 4). Czworokąt $ACBP$ jest wówczas równoległobokiem, wobec czego

$$\sphericalangle BCD=\sphericalangle APC.$$

To w połączeniu z założeniem zadania pozwala wywnioskować, że $\sphericalangle CAE = \sphericalangle APC$. Trójkąty ECA oraz ACP są więc podobne (cecha kąt–kąt). Wobec tego

$$\frac{EC}{AC} = \frac{AC}{PC},$$

czyli $AC^2 = EC \cdot PC$. Ponadto $EC = \frac{1}{2}CD$ i $PC = 2 \cdot CD$, a zatem $EC \cdot PC = CD^2$ i w konsekwencji $AC^2 = CD^2$. Ostatecznie $AC = CD$, co kończy rozwiązanie zadania.

W dwóch ostatnich zadaniach równoległoboki konstruowaliśmy w oparciu o warunek (b) z przywołanego twierdzenia. W kolejnych dwóch przykładach wykorzystamy warunek (d), tj. zamiast symetrii środkowej rozważymy równoległe przesunięcie odcinka.

Zadanie 4. (Obóz Naukowy OMG, rok 2015)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Na bokach AC i BC wybrano odpowiednio takie punkty D i E, że $AB = BD = DE$ oraz $AD = CE$. Wyznacz miarę kąta ACB.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez P taki punkt, że czworokąt $ABPD$ jest równoległobokiem (rys. 5). Wówczas $BP = AD = CE$ oraz $\sphericalangle PBE = \sphericalangle ECD$. Ponadto

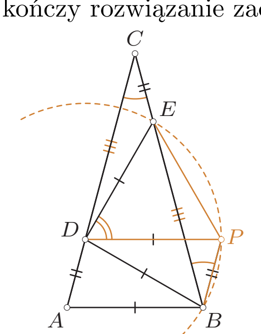
$$BE = BC - CE = AC - AD = CD,$$

skąd wniosek, że trójkąty BPE oraz CED są przystające (cecha bok–kąt–bok). Wobec tego $PE = ED$, co w połączeniu z $ED = AB = PD$ oznacza, że trójkąt DPE jest równoboczny.

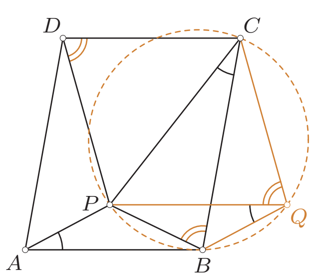
Z równości $BD = PD = ED$ wynika, że punkt D jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BPE. Stąd na mocy zależności między kątem wpisanym PBE oraz kątem środkowym PDE w tym okręgu, otrzymujemy

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle PBE = \tfrac{1}{2}\sphericalangle PDE = \tfrac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ,$$

co kończy rozwiązanie zadania.



rys. 5



rys. 6

Pomysł na powyższe rozumowanie można objaśnić następująco: obecna w warunkach zadania równość odcinków $AB = DE$ była trudno uchwytna, w związku z czym przesunęliśmy równolegle odcinek AB tak, aby miał wspólny koniec z odcinkiem DE.

Zadanie 5.

Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym spełniona jest równość $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB$. Udowodnij, że $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PDC$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez Q taki punkt, że czworokąt $ABQP$ jest równoległobokiem (rys. 6). Zauważmy, ze wówczas $CD = AB = PQ$ oraz $CD \parallel AB \parallel PQ$, a zatem czworokąt $CDPQ$ również jest równoległobokiem.

Równości $\sphericalangle PQB = \sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB$ prowadzą do wniosku, że na czworokącie $BPCQ$ można opisać okrąg (obydwa punkty C i Q leżą po tej samej stronie prostej PB — przeciwnej niż punkt A). Wobec tego również $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PQC = \sphericalangle PDC$, przy czym ostatnia równość wynika z faktu, że $CDPQ$ jest równoległobokiem. To kończy rozwiązanie zadania.

Tym razem dana równość kątów była trudno uchwytna z tego względu, że punkty A i C znajdują się po przeciwnych stronach prostej PB. Stąd pomysł, by przenieść jeden z nich na drugą stronę tej prostej i uzyskać czwórkę punktów leżących na jednym okręgu.

Na koniec proponujemy kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki podamy tradycyjnie w kolejnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 6. (VIII OMG, zawody III stopnia)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Punkt M jest środkiem boku AB. Na odcinkach AC i BC wybrano odpowiednio takie punkty P i Q, że

$$AP = PQ = QB.$$

Wykaż, że $\sphericalangle PMQ = 90^\circ$.

Zadanie 7. (Obóz Naukowy OMG, rok 2015)

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, którego wysokości przecinają się w punkcie H. Punkty K i L są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A i B, a punkt M jest środkiem odcinka AB. Okręgi opisane na trójkątach ABH i CKL przecinają się w punkcie P różnym od H. Wykaż, że punkty C, M, P leżą na jednej prostej.

Zadanie 8. (Obóz Naukowy OMG, rok 2015)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Na bokach BC i AC leżą odpowiednio takie punkty D i E, że $BD = DE = EA$. Udowodnij, że $\sphericalangle ABE = 30^\circ$.

Zadanie 9. (Obóz Naukowy OMG, rok 2013)

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach BC i DA. Punkty P i Q są środkami odpowiednio przekątnych AC i BD tego trapezu. Wykaż, że jeżeli $\sphericalangle DAQ = \sphericalangle BAC$, to $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ABP$.

Zadanie 10. (IV OMG, zawody II stopnia)

Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E należący do boku BC. Przez punkt D prowadzimy prostą k równoległą do prostej AE. Na prostej k obieramy takie punkty K, L, że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że równoległoboki $ABCD$ i $AEKL$ mają równe pola.

Zadanie 11. (X OMG, zawody III stopnia)

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 90^\circ.$$

Punkt M jest środkiem boku CD. Znając długości odcinków AD oraz BC, które wynoszą odpowiednio a oraz b, oblicz wartość wyrażenia $[ABM] - [DAM] - [BCM]$.

Uwaga. Symbol $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

Zadanie 12. (LIII OM, zawody I stopnia)

Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF. Wyznacz możliwe wartości wyrażenia $MN : BC$.

Łukasz Bożyk

Piękne umysły

W dniach 6–12 kwietnia br. odbyła się w Zurychu VI Europejska Olimpiada Matematyczna Dziewcząt (European Girls' Mathematical Olympiad, EGMO). Polskę reprezentowały:

- Aleksandra Cynk, V LO w Krakowie,
- Katarzyna Kępińska, VIII LO w Katowicach,
- Bogna Pawlus, LO w Milówce,
- Barbara Zięba, III LO we Wrocławiu.

Wszystkie wymienione dziewczęta były w przeszłości laureatkami OMG.

Pierwszy raz na temat EGMO pisaliśmy w *Kwadracie* nr 5 (czerwiec 2012), zaraz po zakończeniu pierwszej edycji zawodów. Wówczas rywalizowały ze sobą uczestniczki z 19 krajów. Od tego czasu popularność olimpiady dla dziewcząt systematycznie rosła. O możliwość dołączenia do zawodów EGMO zaczęło ubiegać się wiele państw, także spoza Europy.

W bieżącym roku w szranki stanęło 168 dziewcząt z 43 krajów, w tym 38 uczestniczek z 10 krajów pozaeuropejskich. Zaledwie w ciągu sześciu lat swojego istnienia olimpiada dla dziewcząt stała się jednym z najbardziej prestiżowych i rozpoznawalnych konkursów matematycznych na świecie.

Tegoroczne zawody odbyły się 8 i 9 kwietnia. Każdego dnia dziewczęta rozwiązywały trzy zadania w czasie 4,5 godziny. Za każde zadanie można było otrzymać do 7 punktów. Zaledwie dwóm uczestniczkom udało się zebrać komplet punktów. Wyczynu tego dokonały Olha Shevchenko z Ukrainy oraz Qi Qi — reprezentantka Stanów Zjednoczonych.

Nasze dziewczęta spisały się znakomicie. Wszystkie zdobyły srebrne medale. Najlepszy wynik uzyskała Kasia Kępińska, zdobywając 24 punkty i zajmując 24. miejsce w klasyfikacji indywidualnej. Ola Cynk i Basia Zięba zdobyły po 20 punktów, co dało im 37. miejsce. Bogna Pawlus zakończyła zawody na 41. miejscu z 19 punktami. W klasyfikacji drużynowej Polska zajęła wysokie 8. miejsce, ex aequo z Kazachstanem i Wielką Brytanią.

Na zakończenie przyjrzyjmy się jednemu z zadań, z którym zmagały się uczestniczki zawodów.

Zadanie

W czworokącie wypukłym $ABCD$ spełnione są zależności $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD = 90°$ oraz $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CDA$. Punkty Q i R leżą odpowiednio na odcinkach BC i CD. Prosta QR przecina proste AB i AD odpowiednio w punktach P i S. Przypuśćmy, że $PQ = RS$. Punkt M jest środkiem odcinka BD, a punkt N — środkiem odcinka QR. Udowodnić, że punkty M, N, A i C leżą na jednym okręgu (rys. 7).

Rozwiązanie

Ponieważ punkt N jest środkiem odcinka QR oraz $PQ = RS$, więc N jest też środkiem odcinka PS. Z kolei odcinki PS oraz QR są przeciwprostokątnymi w trójkątach prostokątnych APS oraz CQR. Stąd wniosek, że

$$\sphericalangle ANP = 2\sphericalangle ASP \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle PNC = 2\sphericalangle PRC\,.$$

Kąty PRC i SRD są wierzchołkowe, a suma dwóch kątów wewnętrznych trójkąta RSD przy wierzchołkach R i S jest równa kątowi zewnętrznemu przy wierzchołku D. Stąd otrzymujemy równości

$$\sphericalangle ASP + \sphericalangle PRC = \sphericalangle DSR + \sphericalangle SRD = \sphericalangle CDA.$$

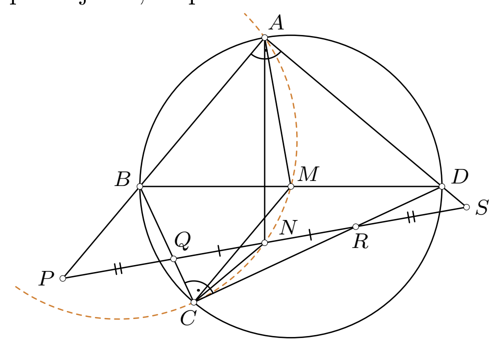
Wobec tego

$$(1)\quad \sphericalangle ANP + \sphericalangle PNC = 2(\sphericalangle ASP + \sphericalangle PRC) = 2\sphericalangle CDA.$$

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, więc $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA = 180°$. Z treści zadania wiemy jednak, że $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CDA$, skąd wniosek, że $\sphericalangle CDA < 90°$. Z równości (1) wynika zatem, że $\sphericalangle ANP + \sphericalangle PNC < 180°$. To pozwala stwierdzić, że punkt N leży po tej samej stronie prostej AC, co punkt D oraz

$$\sphericalangle ANC = \sphericalangle ANP + \sphericalangle PNC = 2\sphericalangle CDA\,.$$

Z kolei kąty BAD oraz BCD są proste, a zatem punkt M jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Z nierówności $\sphericalangle CDA < 90°$ wynika więc, że $\sphericalangle AMC = 2\sphericalangle ADC$ oraz punkt M leży po tej samej stronie prostej AC, co punkt D.



rys. 7

Łącząc wyżej otrzymane zależności, uzyskujemy

$$\sphericalangle ANC = 2\sphericalangle ADC = \sphericalangle AMC\,,$$

a ponadto punkty N i M leżą po tej samej stronie prostej AC (co punkt D). Stąd wniosek, że punkty A, M, N, C leżą na jednym okręgu, co kończy rozwiązanie zadania.

Tomasz Cieśla

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Dorysujmy środek odcinka

6. Dorysuj środek jednego z ramion trapezu.

7. Dorysuj środek jednego z boków AB lub CD.

8. Dorysuj środek odcinka AB. Wykorzystaj zadanie 2.

9. Dorysuj środki odcinków AE, BD. Wykorzystaj zadanie 2.

10. Dorysuj środki krawędzi AB, CD i uzasadnij, że odcinek łączący dorysowane punkty ma długość 2.

11. Dorysuj środki odcinków AC, BC i zauważ pewną parę trójkątów przystających.

W liczbach całkowitych

4. *Odpowiedź:* $(a,b) = ((l+1)^3 l, (l+1)^2 l^2)$, gdzie l jest liczbą całkowitą dodatnią lub $(a,b) = ((l-1)^3 l, (l-1)^2 l^2)$, gdzie l jest liczbą całkowitą większą od 1. Postępuj podobnie, jak w rozwiązaniu zadania 2.

5. *Odpowiedź:* $(a,b) = (d(2^n+1), d(2^n-1))$, gdzie d jest dodatnią liczbą całkowitą. Skróć ułamek stojący po lewej stronie przez $d = \mathrm{NWD}(a,b)$. Uzasadnij, że jeśli dodatnie liczby całkowite k, l są względnie pierwsze, to $\mathrm{NWD}(k-l, k+l)$ równa się 1 lub 2.

6. *Odpowiedź:* $(a,b) = (\frac{1}{2}(d^3+d), \frac{1}{2}(d^3-d))$, gdzie $d > 1$ jest liczbą całkowitą. Niech $a = dk$, $b = dl$. Postępuj podobnie, jak w rozwiązaniu zadania 2. Rozpatrz przypadki w zależności od wartości $\mathrm{NWD}(k-l, k+l)$.

7. Przepisz dane równanie w postaci $b^3 = (a-2)(a+2)$, a następnie uzasadnij, że liczby $a-2$ i $a+2$ są względnie pierwsze.

„Kwadrat" redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk.
Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: `kwadrat.omj@gmail.com` Nakład: 2000 egz.