Olimpiada Matematyczna Juniorów
www.omj.edu.pl

Kwadrat

Gazetka Olimpiady Matematycznej Juniorów

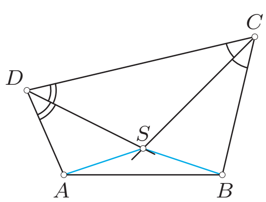
Nr 21
czerwiec 2018

ISSN 2300-0708

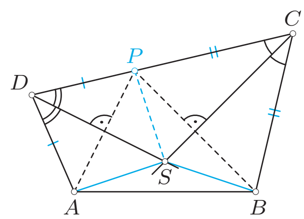
Dorysujmy lustrzane odbicie

W kolejnym artykule z serii *Dorysujmy...* zajmiemy się konfiguracjami, w których pomocna jest *symetria osiowa*. Warto ją rozważyć wtedy, gdy jednym z elementów rysunku jest *dwusieczna* pewnego kąta, czyli jego oś symetrii. Oś ta jest naturalnym kandydatem na prostą, względem której można odbić punkty leżące na ramionach kąta. Ich obrazy znajdują się wówczas na drugim ramieniu.

Zadanie 1. (VIII OMG, zawody I stopnia)
Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AD+BC=CD$. Dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie S (rys. 1). Udowodnij, że $AS=BS$.



rys. 1



rys. 2

Rozwiązanie
Oznaczmy przez P punkt symetryczny do punktu A względem dwusiecznej kąta CDA (rys. 2). Wówczas punkt P leży na odcinku CD oraz $PD=AD$. Stąd

$$PC=CD-PD=CD-AD=BC\,.$$

W trójkącie równoramiennym PBC dwusieczna kąta przy wierzchołku C jest symetralną podstawy BP. Wobec tego punkty B i P są symetryczne względem dwusiecznej kąta BCD. W związku z tym

$$AS=PS=BS\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

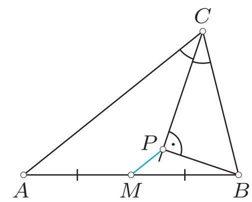
Zadanie 2. (III OMG, zawody III stopnia)
Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC>BC$ (rys. 3). Punkt P jest rzutem prostokątnym punktu B na dwusieczną kąta ACB. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Wiedząc, że

$$BC=a,\quad CA=b,\quad AB=c,$$

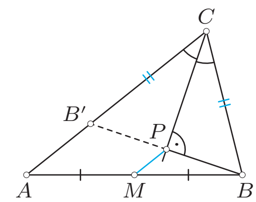
oblicz długość odcinka PM.

Rozwiązanie
Niech B' będzie punktem symetrycznym do B względem prostej CP (rys. 4). Wówczas punkt B' leży na odcinku AC oraz $BC=B'C$. Ponadto punkt P jest środkiem odcinka BB'.

Wobec tego odcinek PM jest linią środkową w trójkącie ABB', a więc jego długość jest równa połowie długości odcinka $B'A$. Dowód tej własności można znaleźć w książeczce Waldemara Pompe *Wokół obrotów, przewodnik po geometrii elementarnej*, Wydawnictwo Szkolne OMEGA (twierdzenie 4.5).



rys. 3



rys. 4

Stąd otrzymujemy

$$PM=\tfrac{1}{2}B'A=\tfrac{1}{2}(CA-B'C)=\tfrac{1}{2}(CA-BC)=\tfrac{1}{2}(b-a)\,,$$

co kończy rozwiązanie.

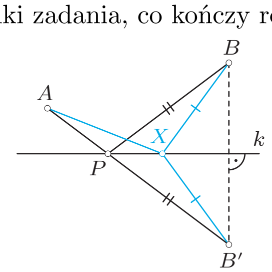
Symetrię osiową warto zastosować także w innych sytuacjach. Przyjrzyjmy się następującemu zadaniu.

Zadanie 3.
Punkty A i B znajdują się po tej samej stronie prostej k. Wyznacz taki punkt P leżący na prostej k, dla którego suma $AP+BP$ przyjmuje najmniejszą wartość.

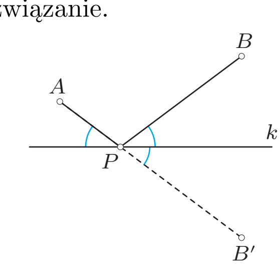
Rozwiązanie
Oznaczmy przez B' obraz punktu B w symetrii względem prostej k, a przez P — punkt przecięcia odcinka AB' z prostą k (rys. 5). Wówczas dla każdego punktu X prostej k spełnione są zależności

$$AX+BX=AX+B'X\geqslant AB'=AP+B'P=AP+BP.$$

Stąd wynika, że tak wyznaczony punkt P spełnia warunki zadania, co kończy rozwiązanie.



rys. 5



rys. 6

Zauważmy, że skonstruowany powyżej punkt P ma tę własność, że kąty, jakie tworzą odcinki AP i BP z prostą k, są równe (rys. 6). Ta własność sprawia, że obraz symetryczny B' punktu B względem prostej k leży na prostej AP. Zobaczmy, jak to spostrzeżenie można wykorzystać w niektórych zadaniach.

Zadanie 4.
Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ABC=90^\circ$ (rys. 7). Punkt M jest środkiem odcinka AC. Punkt P wybrano na boku BC w taki sposób, że

$$\sphericalangle APB=\sphericalangle CPM\,.$$

Wykaż, że $PC=2\cdot PB$.

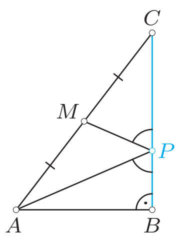
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Rozwiązanie

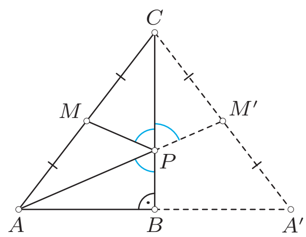
Niech A' i M' będą punktami symetrycznymi odpowiednio do punktów A i M względem prostej BC (rys. 8). Wówczas, ponieważ punkt M jest środkiem odcinka AC, więc punkt M' jest środkiem odcinka $A'C$. Ponadto

$$\sphericalangle CPM' = \sphericalangle CPM = \sphericalangle APB,$$

skąd wniosek, że punkty A, P, M' leżą na jednej prostej. Punkt P jest zatem punktem przecięcia środkowych AM' i CB w trójkącie $AA'C$.



rys. 7



rys. 8

Wiadomo z kolei, że środkowe w dowolnym trójkącie przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku $2:1$, patrząc od wierzchołka trójkąta. Dowód tej własności także można znaleźć w książeczce Waldemara Pompe *Wokół obrotów, przewodnik po geometrii elementarnej*, Wydawnictwo Szkolne OMEGA (twierdzenie 4.11). Stosując to twierdzenie do trójkąta $AA'C$, uzyskujemy natychmiast $PC = 2 \cdot PB$, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 5. (Obóz Naukowy OMG, rok 2015)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 90°$ (rys. 9). Na bokach BC, CA, AB tego trójkąta wybrano odpowiednio takie punkty D, E, F, że

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDF, \ \sphericalangle BFD = \sphericalangle AFE, \ \sphericalangle AEF = \sphericalangle BEC.$$

Udowodnij, że $AD + DF = BE + EF$.

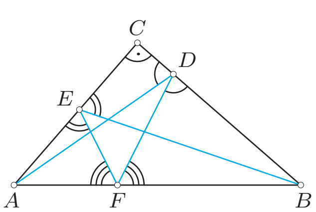
Rozwiązanie

Oznaczmy przez A' i B' punkty symetryczne do punktów A i B odpowiednio względem prostych BC i AC (rys. 10). Wówczas czworokąt $ABA'B'$ jest rombem, gdyż jego przekątne mają wspólny środek i są prostopadłe. Ponieważ

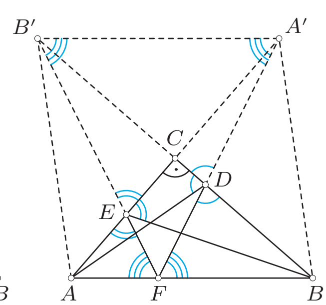
$$\sphericalangle BDF = \sphericalangle ADC = \sphericalangle A'DC,$$
$$\sphericalangle AEF = \sphericalangle BEC = \sphericalangle B'EC,$$

więc punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach $A'F$ i $B'F$. Wobec tego

$$AD + DF = A'D + DF = A'F,$$
$$BE + EF = B'E + EF = B'F.$$



rys. 9



rys. 10

Proste AB i $A'B'$ są równoległe, a zatem

$$\sphericalangle A'B'F = \sphericalangle AFB' = \sphericalangle BFA' = \sphericalangle B'A'F.$$

Wobec tego $A'F = B'F$, co w połączeniu z otrzymanymi wcześniej równościami kończy dowód.

Tradycyjnie proponujemy kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu.*

Zadanie 6.

Punkt M leży na dwusiecznej kąta zewnętrznego przy wierzchołku C trójkąta ABC. Udowodnij, że

$$AM + BM \geqslant AC + BC.$$

Zadanie 7.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC, przy czym

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABE = \sphericalangle ACB$$

oraz $AD + DE + EB = AC$. Wyznacz miarę kąta ACB.

Zadanie 8.

Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu C odpowiednio na proste AI i BI. Znając długości boków trójkąta ABC, oblicz długość odcinka PQ.

Zadanie 9.

Punkt M wybrano na średnicy AB okręgu ω. Prosta nachylona do prostej AB pod kątem $45°$ przechodzi przez punkt M i przecina okrąg ω w punktach C i D. Wykaż, że wartość $CM^2 + DM^2$ nie zależy od wyboru punktu M.

Zadanie 10.

Dany jest okrąg ω o średnicy 1 oraz łamana s o końcach należących do tego okręgu, której długość jest mniejsza od 1. Wykaż, że pewna średnica okręgu ω nie ma z łamaną s żadnych punktów wspólnych.

Zadanie 11. (Facebookowa Liga OMG, zad. 39)

Punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC. Symetralna odcinka CM przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach K i L. Wykaż, że $AK^2 + BL^2 = KL^2$.

Zadanie 12. (Obóz Naukowy OMG, rok 2016)

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 30°$. Na bokach BC, AC znajdują się odpowiednio takie punkty D i E, że

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle CDE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle AEB = \sphericalangle DEC.$$

Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie K, a odcinki DE i CK przecinają się w punkcie L. Udowodnij, że $AD + DL = BE + EL$.

Łukasz Bożyk

Najmniejsze rozwiązanie

Niektóre równania nie mają rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych. Powodów ku temu może być wiele. Czasami algebraiczna postać równania pozwala zastosować następujące sprytne rozumowanie.

Przypuśćmy, że dane równanie ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych. Spośród wszystkich takich rozwiązań wybierzmy rozwiązanie *najmniejsze*. Jeśli posługując się tym rozwiązaniem będziemy umieli wskazać rozwiązanie jeszcze *mniejsze*, to uzyskamy sprzeczność! W takiej sytuacji równanie nie może mieć rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych.

Co znaczy „najmniejsze rozwiązanie” i jaka postać równania pozwala wskazać rozwiązanie jeszcze mniejsze? Przyjrzyjmy się następującym przykładom.

Zadanie 1.

Wykaż, że równanie $x^3+2y^3=4z^3$ nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że dane równanie posiada co najmniej jedno rozwiązanie (x,y,z) w dodatnich liczbach całkowitych. Spośród wszystkich takich trójek (x,y,z) wybierzmy tę, dla której liczba $x+y+z$ jest najmniejsza.

Zauważmy teraz, że skoro liczby $2y^3$ i $4z^3$ są parzyste, to liczba x dzieli się przez 2. Wobec tego możemy napisać $x=2x_1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej x_1. Wstawiając ostatnią zależność do wyjściowego równania i dzieląc dane równanie stronami przez 2, otrzymujemy

$$4x_1^3+y^3=2z^3.$$

W takim razie, podobnie jak wyżej, liczba y jest parzysta, skąd $y=2y_1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej y_1. Wstawiając tę równość do powyższego równania i dzieląc przez 2, dostajemy

$$2x_1^3+4y_1^3=z^3.$$

I analogicznie $z=2z_1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej z_1. Stąd uzyskujemy

$$x_1^3+2y_1^3=4z_1^3.$$

Wobec tego trójka (x_1,y_1,z_1) także jest rozwiązaniem danego w treści zadania równania oraz

$$x_1+y_1+z_1=\frac{1}{2}(x+y+z)<x+y+z.$$

Uzyskaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że dane równanie nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych.

Zadanie 2.

Wykaż, że równanie $x^2+y^2=3(z^2+t^2)$ nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych x, y, z, t.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że istnieje rozwiązanie danego równania w liczbach całkowitych. Spośród wszystkich rozwiązań wybierzmy taką czwórkę (x,y,z,t), dla której suma $x+y+z+t$ jest najmniejsza.

Z danego równania wnioskujemy natychmiast, że liczba x^2+y^2 jest podzielna przez 3. Z kolei z równości

$$(3k)^2=9k^2=3\cdot(3k^2),$$
$$(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3\cdot(3k^2+2k)+1,$$
$$(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3\cdot(3k^2+4k+1)+1$$

wynika, że kwadraty liczb całkowitych podzielnych przez 3 dają resztę 0 z dzielenia przez 3, a niepodzielnych przez 3 — resztę 1.

Gdyby zatem któraś z liczb x lub y nie była podzielna przez 3, to liczba x^2+y^2 dawałaby resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 3. Skoro więc liczba x^2+y^2 dzieli się przez 3, to obie liczby x, y także dzielą się przez 3. Stąd

$$x=3x_1 \quad \text{oraz} \quad y=3y_1$$

dla pewnych dodatnich liczb całkowitych x_1 oraz y_1. Po wstawieniu obu powyższych zależności do danego równania, sprowadzamy je do postaci

$$3(x_1^2+y_1^2)=z^2+t^2.$$

Pozostaje zauważyć, że trójka (z,t,x_1,y_1) także spełnia dane równanie, a ponadto

$$z+t+x_1+y_1=z+t+\frac{1}{3}(x+y)<x+y+z+t.$$

Uzyskaliśmy sprzeczność, skąd wniosek, że dane równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

Zadanie 3.

Udowodnij, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite x, y, z, dla których $(3x+4y)(4x+5y)=7^z$.

Rozwiązanie

Przypuśćmy przeciwnie, że takie liczby istnieją. Spośród wszystkich trójek (x,y,z) dodatnich liczb całkowitych, które spełniają dane równanie, wybierzmy taką, dla której suma $x+y+z$ jest najmniejsza.

Zauważmy najpierw, że każdy z czynników po lewej stronie jest większy niż 1. Skoro prawa strona jest potęgą 7, to oba czynniki po lewej stronie muszą być potęgami liczby 7 o wykładnikach będących dodatnimi liczbami całkowitymi. W szczególności więc oba te czynniki są podzielne przez 7. W takim razie liczba

$$x+y=(4x+5y)-(3x+4y)$$

też dzieli się przez 7, a skąd wniosek, że liczba

$$y=(3x+4y)-3(x+y)$$

również dzieli się przez 7. Ostatecznie także liczba $x=(x+y)-y$ jest podzielna przez 7. Innymi słowy

$$x=7x_1 \quad \text{oraz} \quad y=7y_1$$

dla pewnych dodatnich liczb całkowitych x_1 oraz y_1. Wstawiając te warunki do danego równania i dzieląc obie strony przez 49, otrzymujemy

$$(3x_1+4y_1)(4x_1+5y_1)=7^{z-2}.$$

Lewa strona uzyskanej zależności jest większa od 1, skąd wniosek, że wykładnik $z-2$ jest dodatni. Trójka $(x_1,y_1,z-2)$ jest więc rozwiązaniem danego równania w dodatnich liczbach całkowitych. Jednak

$$x_1+y_1+(z-2)=\frac{1}{7}(x+y)+(z-2)<x+y+z.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, a więc dane równanie nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych.

Na koniec proponujemy Czytelnikom kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 4.

Udowodnij, że równanie $2a^2+3b^2=c^2$ nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c.

Zadanie 5.

Wykaż, że równanie

$$x^2+2y^2=5(z^2+2t^2)$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych x, y, z, t.

Zadanie 6.

Udowodnij, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, dla których zachodzą równości

$$a^2+6b^2=c^2 \quad \text{oraz} \quad b^2+6a^2=d^2.$$

Zadanie 7.

Udowodnij, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, n, dla których zachodzą równości

$$a^2+b^2=8n^2, \quad c^2+d^2=4n^2, \quad ac+bd=2n^2.$$

Zadanie 8.

Wykaż, że równanie $(x+3y)(3x+5y)=11^z$ nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych x, y, z.

Zadanie 9.

Wyznacz wszystkie czwórki (x,y,z,t) liczb całkowitych, dla których $x^4+4y^4=2(z^4+4t^4)$.

Michał Kieza

Baltic Way 2017

W dniach 9–13 listopada 2017 w Sorø (Dania) odbyły się zawody *Baltic Way* 2017. Polskę reprezentowali:

- Jadwiga Czyżewska, XIV LO w Warszawie;
- Piotr Kowalewski, III LO w Gdyni;
- Stanisław Strzelecki, XIV LO w Warszawie;
- Radosław Żak, Katolickie Gimn. w Krakowie;
- Antoni Żewierżejew, III LO w Gdyni.

Skład ten wyłoniono na podstawie wyników LXVIII Olimpiady Matematycznej (2016/17). Przewodniczącym delegacji polskiej był Wojciech Nadara, natomiast zastępcą przewodniczącego — Beata Bogdańska.

Baltic Way to drużynowe zawody matematyczne, w których każdego roku biorą udział reprezentacje dziesięciu krajów (Danii, Estonii, Finlandii, Islandii, Litwy, Łotwy, Niemiec, Norwegii, Polski, Szwecji) oraz jednego miasta (Sankt Petersburga). W ciągu 4,5 godziny każdy zespół ma do rozwiązania 20 zadań (po 5 z działów: algebra, kombinatoryka, geometria i teoria liczb). Za każde z zadań można dostać maksymalnie 5 punktów, a więc łącznie można otrzymać do 100 punktów.

Nasza reprezentacja dobrze się spisała, zajmując trzecie miejsce z wynikiem 75 punktów. Zawody wygrała drużyna z Sankt Petersburga, zdobywając 85 punktów, a na drugim miejscu znalazła się drużyna z Niemiec, uzyskując 78 punktów.

Drużyna gospodarzy zajęła czwarte miejsce z wynikiem 68 punktów, rozwiązując jako jedyna trudne zadanie dwudzieste. Pozostałe kraje skandynawskie zajęły miejsca od 7 do 9 w następującej kolejności: Szwecja (60 punktów), Norwegia (58 punktów) oraz Finlandia (41 punktów).

Na zakończenie omówimy jedno zadanie z tych zawodów, którego rozwiązanie wydaje się proste, lecz, jak pokazują wyniki zawodów, okazało się ono trudne do zauważenia: jedynie cztery drużyny rozwiązały to zadanie w pełni poprawnie.

Zadanie

Czy istnieje skończony zbiór liczb rzeczywistych, których suma wynosi 2, suma ich kwadratów wynosi 3, suma ich sześcianów wynosi 4, …, oraz suma ich dziewiątych potęg wynosi 10?

Rozwiązanie

Udowodnimy, że taki zbiór nie istnieje.

Przypuśćmy, że istnieją liczby spełniające warunki zadania. Oznaczmy je przez $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Wtedy w szczególności:

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=3,$$
$$a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3=4,$$
$$a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4=5.$$

Zauważmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność

$$x^2+x^4\geqslant 2x^3,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=0$ lub $x=1$. Istotnie:

$$x^2+x^4-2x^3=x^2(1-2x+x^2)=x^2(1-x)^2\geqslant 0,$$

co dowodzi postulowanej nierówności. Równość natomiast ma miejsce jedynie wtedy, gdy $x^2(1-x)^2=0$, a więc dokładnie wtedy, gdy $x=0$ lub $x=1$.

Po podstawieniu do tej nierówności w miejsce x kolejno liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n$, a następnie dodaniu uzyskanych n nierówności stronami, otrzymujemy

$$(a_1^2+a_1^4)+(a_2^2+a_2^4)+\ldots+(a_n^2+a_n^4)\geqslant$$
$$\geqslant 2(a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3)=2\cdot 4=8.$$

Jednak lewa strona tej zależności jest równa $3+5=8$. W związku z tym powyższa nierówność musi być równością, co implikuje, że wszystkie nierówności sumowane stronami muszą być równościami. Stąd wynika, że każda z liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n$ jest równa 0 lub 1.

Jednak wtedy zależność

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=3$$

implikuje, że wśród liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n$ są dokładnie trzy jedynki, podczas gdy z równości

$$a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4=5$$

wynika, że wśród tych samych liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n$ jest dokładnie pięć jedynek. Uzyskaliśmy sprzeczność, skąd wynika, że liczby o postulowanej własności nie istnieją.

Kolejne zawody *Baltic Way* odbędą się w Sankt Petersburgu jesienią 2018 roku.

Wojciech Nadara

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Między kwadratami

6. Uzasadnij, że dana liczba leży pomiędzy kwadratami liczb $n+4$ i $n+5$.

7. *Odpowiedź:* Takie pary (x,y) nie istnieją. Postępuj analogicznie, jak w rozwiązaniu zadania 3.

8. *Odpowiedź:* $(x,y)=(2,1)$. Rozważ kwadraty liczb y^2 i y^2+1.

9. Zapisz dane równanie w postaci $(2y-1)^2=4x^4-4x^3+1$. Znajdź dwa kwadraty najbliższe liczbie $4x^4-4x^3+1$.

10. Załóż przeciwnie. Najpierw przyjmij $n=(2s)^2$ i rozważ kwadraty liczb $(2s)^3+as-1$ oraz $(2s)^3+as+1$ dla dużych wartości s. Wywnioskuj stąd, że $c=0$. Następnie przyjmij jako n odpowiednio dobraną liczbę pierwszą.

Dorysujmy równoległobok

Dorysuj taki punkt X, że równoległobokiem jest...

6. $AXBQ$. Zauważ, że APX jest równoboczny.

7. $AXBC$. Zauważ, że $AXBH$ jest wpisany w okrąg.

8. $BDEX$. Zauważ, że AEX jest równoboczny.

9. $AXBP$. Zauważ, że $AXBQ$ jest wpisany w okrąg.

10. $AEXD$. Rozważ pole tego czworokąta.

11. $BCXD$. Zauważ, że kąt ADX jest prosty.

12. $AEXG$. Poprowadź odcinki XB oraz XC.

„Kwadrat" redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk.
Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omj@gmail.com Nakład: 2000 egz.