Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 2
grudzień 2011

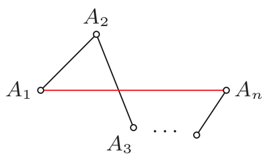
Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Nierówność trójkąta

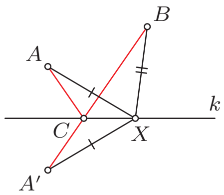
Jednym z narzędzi, które pozwala uzyskać wiele ciekawych zależności geometrycznych jest *nierówność trójkąta*. Orzeka ona, iż dla każdych trzech punktów A, B, C długość odcinka AB jest nie większa od sumy długości odcinków BC i CA. Nierówność tę można łatwo uogólnić na przypadek n punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (rys. 1):

(1) $$A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n \geqslant A_1A_n\,.$$

Podamy teraz kilka przykładów zadań, które można efektownie rozwiązać, wykorzystując powyższą nierówność.



rys. 1



rys. 2

Zadanie 1.

Dana jest prosta k oraz punkty A, B, leżące po tej samej stronie prostej k. Na prostej k wyznacz taki punkt C, aby suma długości odcinków AC i BC była najmniejsza (rys. 2).

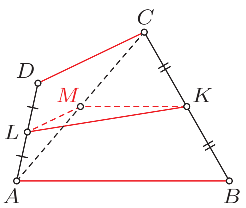
Rozwiązanie

Konstrukcja punktu C wygląda następująco. Punkt A odbijamy symetrycznie względem prostej k, uzyskując punkt A' (rys. 2). Wówczas punkt przecięcia odcinka BA' z prostą k jest szukanym punktem C.

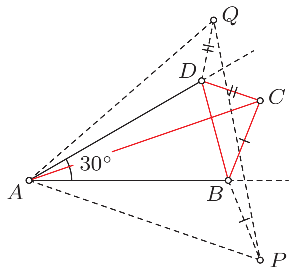
Istotnie: niech X będzie dowolnym punktem leżącym na prostej k. Z własności symetrii osiowej wynika, że $AC = A'C$ oraz $AX = A'X$. Wobec tego, na mocy nierówności trójkąta, uzyskujemy

$$AX + BX = A'X + BX \geqslant A'B = A'C + BC = AC + BC\,.$$

Zatem suma $AX + BX$ przyjmuje najmniejszą wartość dla $X = C$.



rys. 3



rys. 4

Zadanie 2.

Punkty K i L są środkami boków BC i DA czworokąta wypukłego $ABCD$ (rys. 3). Udowodnij, że

$$KL \leqslant \tfrac{1}{2}(AB + CD)\,.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez M środek przekątnej AC (rys. 3). Wówczas $KM = \frac{1}{2}AB$ oraz $LM = \frac{1}{2}CD$. Zatem, na mocy nierówności trójkąta, uzyskujemy

$$KL \leqslant KM + LM = \tfrac{1}{2}(AB + CD)\,.$$

Zadanie 3.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym kąt BAD ma miarę 30° (rys. 4). Udowodnij, że

$$BC + CD + DB \geqslant AC\,.$$

Rozwiązanie

Niech P, Q będą punktami symetrycznymi do punktu C odpowiednio względem prostych AB, AD (rys. 4). Wówczas $AP = AC = AQ$, a ponadto

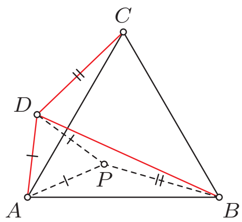
$$\sphericalangle PAQ = \sphericalangle PAC + \sphericalangle QAC = 2\sphericalangle BAC + 2\sphericalangle DAC = 60^\circ\,.$$

Zatem trójkąt PAQ jest równoboczny i jego bok ma długość równą długości odcinka AC. Wobec tego, na mocy nierówności (1), uzyskujemy

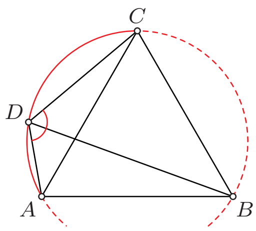
$$BC + CD + DB = BP + QD + BD \geqslant PQ = AC\,.$$

Zadanie 4.

Dany jest trójkąt równoboczny ABC (rys. 5). Udowodnij, że dla każdego punktu D spełniona jest nierówność $AD + CD \geqslant BD$.



rys. 5



rys. 6

Rozwiązanie

Trójkąt ADC obracamy wokół punktu A, w taki sposób, aby punkt C przeszedł na punkt B. Wówczas kąt obrotu wynosi 60°, a punkt D po tym obrocie pokryje się z pewnym punktem P (rys. 5). Zatem $AP = AD$, $BP = CD$ oraz $\sphericalangle PAD = 60^\circ$. Wobec tego trójkąt APD jest równoboczny, skąd wniosek, że $AD = DP$. Na mocy nierówności trójkąta uzyskujemy

$$AD + CD = DP + BP \geqslant BD\,.$$

Równość w powyższej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt P leży na odcinku BD, a tak się stanie, jeżeli $\sphericalangle APB = 120^\circ$.

Zatem $AD + CD = BD$ wtedy i tylko wtedy, gdy punkt D leży na zewnątrz trójkąta ABC oraz zachodzi równość $\sphericalangle ADC = 120^\circ$. Punkty D spełniające ten warunek to punkty krótszego łuku AC okręgu opisanego na trójkącie ABC (rys. 6).

Wiele przykładów zastosowania nierówności trójkąta można znaleźć przeglądając zadania z OMG, w tym także z bieżącej edycji (część korespondencyjna). Dla tych, którym to nie wystarczy, podamy na koniec jeszcze

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

kilka zadań. Wskazówki do nich zamieścimy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 5.

Punkt P leży wewnątrz kąta ostrego. Na ramionach tego kąta wyznacz takie punkty A i B, dla których obwód trójkąta ABP jest najmniejszy.

Zadanie 6.

Dany jest kąt ostry o wierzchołku O i punkt P leżący wewnątrz tego kąta. Na ramionach tego kąta wyznacz punkty X i Y spełniające równość $OX=OY$, dla których suma $PX+PY$ jest najmniejsza.

Zadanie 7.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt M jest środkiem boku AB oraz $\sphericalangle CMD=120°$. Udowodnij, że

$$\tfrac{1}{2}AB+AD+BC\geqslant CD.$$

Zadanie 8.

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $AD<AB$. Wewnątrz tego prostokąta wyznacz takie punkty P i Q, dla których suma $AP+DP+PQ+QB+QC$ przyjmuje najmniejszą wartość.

Waldemar Pompe

Wspomnienia z Obozu Naukowego OMG

Od 29 maja do 4 czerwca br. w miejscowości Perzanowo (woj. mazowieckie) odbył się Obóz Naukowy OMG, na który pojechało 20 gimnazjalistów wyłonionych spośród laureatów ubiegłorocznej edycji OMG. W trakcie tygodnia uczestnicy rozwiązywali zadania na zawodach indywidualnych, rywalizowali ze sobą podczas Meczu Matematycznego oraz brali udział w różnorodnych zajęciach poszerzających ich wiedzę matematyczną.

Wśród zadań Obozu pojawiło się kilka problemów dowcipnych i zaskakujących; w jednym z nich należało obliczyć kąt w ścianie pewnego ostrosłupa, przy czym prawidłową odpowiedzią był... dowód, że ów ostrosłup nie istnieje! Najwyraźniej zainspirowani tym zadaniem uczestnicy Meczu Matematycznego, należący do jednej z drużyn, przez większość czasu przewidzianego na rozwiązywanie zadań próbowali udowodnić, że teza jednego z nich jest nieprawdziwa. Tym razem okazało się jednak, że zadanie nie było pułapką, a przeciwna drużyna przedstawiła podczas Meczu prawidłowy dowód.

W trakcie rozwiązywania zadań jednemu zespołowi zabrakło kolorowej kredy. Nie zabrakło im jednak pomysłowości i udali się do kilkuletniej Jaśminki, rysującej kredą na asfalcie rysunki wróżek. W zamian za rysunek motylka (wykonany przez dziewczęcą część drużyny) Jaśminka zgodziła się podzielić swoją kredą i tym samym ułatwić drużynie rozwiązywanie zadań z geometrii.

Ostatnie zadanie z Obozu zostało poświęcone prawdziwej historii, która wydarzyła się w trakcie wyjazdu. Rozwiązanie odbiegało jednak od rzeczywistości, ponieważ dowodziło, że uczestnicy wyrzuceni z zajęć z powodu złego zachowania nigdy nie będą mogli na nie wrócić. Na Obozie tak źle nie było — wrócili po upływie kilku minut.

Zadania z Obozu można znaleźć na stronie internetowej OMG w zakładce `Zadania`.

Urszula Swianiewicz

Tożsamość Diofantosa

Już w III wieku naszej ery Diofantos wiedział, że jeśli liczby całkowite m i n można przedstawić w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych, to iloczyn mn również posiada tę własność. Aby uzasadnić słuszność tego stwierdzenia, wystarczy przyjąć $m=a^2+b^2$, $n=c^2+d^2$ (gdzie a,b,c,d są liczbami całkowitymi) i przeprowadzić poniższy rachunek:

$$\begin{aligned} mn&=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2=\\ &=(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)+(a^2d^2-2abcd+b^2c^2)=\\ &=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2. \qquad (1)\end{aligned}$$

Warto zauważyć, że aby otrzymać szukane kwadraty dodaliśmy $2abcd$ do $a^2c^2+b^2d^2$, a odjęliśmy od $a^2d^2+b^2c^2$ — gdybyśmy postąpili odwrotnie, otrzymalibyśmy inny prawidłowy rozkład:

$$mn=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

Przyjrzyjmy się, jak wykorzystać powyższe tożsamości w zadaniach.

Zadanie 1.

Udowodnij, że jeśli liczba n jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych, to liczba $5n$ również.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że $n=a^2+b^2$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi. Zauważmy, że $5=1^2+2^2$. Używając przed chwilą wyprowadzonej równości, dostajemy

$$5n=(1^2+2^2)(a^2+b^2)=(a+2b)^2+(2a-b)^2,$$

co oznacza, że $5n$ jest również sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych. Przy okazji otrzymaliśmy też jawne przedstawienie badanej liczby.

Możemy również rozważać iloczyny wyrażeń kwadratowych wraz ze współczynnikami, na przykład liczby postaci a^2+nb^2 dla liczb całkowitych a, b oraz dowolnej, ustalonej liczby całkowitej n. Czy iloczyn dwóch liczb tej postaci też można zapisać w ten sposób? Twierdzącej odpowiedzi dostarczają nam poniższe przekształcenia:

$$\begin{aligned} (a^2+nb^2)(c^2+nd^2)&=a^2c^2+n^2b^2d^2+na^2d^2+nb^2c^2=\\ &=(a^2c^2+2nabcd+n^2b^2d^2)+n(a^2d^2-2abcd+b^2c^2)=\\ &=(ac+nbd)^2+n(ad-bc)^2. \qquad (2)\end{aligned}$$

Podobnie jak poprzednio, do szukanej tożsamości dochodzimy poprzez odpowiednie wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia, co pozwoliłoby nam także na uzyskanie równości:

$$(a^2+nb^2)(c^2+nd^2)=(ac-nbd)^2+n(ad+bc)^2. \qquad (3)$$

Zadanie 2.

Liczbę całkowitą nazwiemy *słoneczną*, jeśli można ją przedstawić w postaci a^2+5b^2, gdzie a i b są niezerowymi liczbami całkowitymi. Udowodnij, że kwadrat liczby słonecznej również jest liczbą słoneczną.

Rozwiązanie

Niech $x=k^2+5l^2$ będzie liczbą słoneczną $(k,l\neq 0)$. Łatwo zauważyć, że badając liczbę x^2 możemy zastosować wzory (2) i (3) dla $a=c=k$, $b=d=l$ i $n=5$. Zwróćmy uwagę, że choć tożsamość (2) doprowadzi nas do mało odkrywczej równości $(k^2+5l^2)(k^2+5l^2)=(k^2+5l^2)^2+0^2$, to tożsamość (3) przyjmuje bardziej użyteczną postać:

$$x^2=(k^2+5l^2)(k^2+5l^2)=(k^2-5l^2)^2+5(kl+kl)^2.$$

Dla niezerowych k, l liczba $2kl$ także jest różna od 0; aby uzasadnić że x^2 jest liczbą słoneczną pozostało nam zatem do udowodnienia, że $k^2-5l^2\neq 0$. Jednak równość $k^2-5l^2=0$ pociągałaby za sobą $k^2/l^2=5$, co oznaczałoby, że liczba $\sqrt{5}$ jest wymierna. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba x^2 jest słoneczna.

Można nabrać podejrzeń, że jeśli pewne dwie liczby są postaci ma^2+nb^2, gdzie a i b są całkowite, a m i n ustalonymi współczynnikami, to ich iloczyn również „odziedziczy” tę własność. Okazuje się jednak, że to nie jest prawda — przykładem są liczby $11=2\cdot 2^2+3\cdot 1^2$ oraz $21=2\cdot 3^2+3\cdot 1^2$, których iloczyn (231) nie da się przedstawić jako suma $2a^2+3b^2$. Dla liczb o dowolnych współczynnikach możemy jednak udowodnić równość (4):

$$(ma^2+nb^2)(mc^2+nd^2)=(mac+nbd)^2+mn\cdot(ad-bd)^2\,.$$

Oznacza ona, że mnożąc dwie liczby postaci ma^2+nb^2 otrzymujemy liczbę postaci $a^2+mn\cdot b^2$. Ponadto, jeśli pomnożymy liczbę pierwszego rodzaju przez liczbę drugiego rodzaju, to znowu otrzymamy liczbę postaci ma^2+nb^2, co ilustruje tożsamość

$$(ma^2+nb^2)(c^2+mn\cdot d^2)=m(ac+nbd)^2+n(bc-mad)^2\,.$$

Zadanie 3.
Wykaż, że iloczyn parzystej liczby liczb postaci

$$2a^2+3b^2\,,$$

gdzie a, b są liczbami całkowitymi, da się przedstawić w postaci k^2+6l^2 dla pewnych liczb całkowitych k,l.

Rozwiązanie
Niech $x_1,x_2,\ldots,x_{2n}$ będą danymi liczbami. Dzięki równości (4) wiemy, że każdy z iloczynów $x_1x_2, x_3x_4,\ldots, x_{2n-1}x_{2n}$ można zapisać w postaci a^2+6b^2 dla pewnych liczb całkowitych a,b. Z równości (3) wnioskujemy zatem, że iloczyn liczb x_1x_2 oraz x_3x_4 można zapisać w tej postaci, dlatego iloczyn liczb $x_1x_2x_3x_4$ i x_5x_6 również. Powtarzając to rozumowanie otrzymamy w końcu, że iloczyn wszystkich początkowych liczb da się zapisać w interesujący nas sposób.

Na zakończenie dodajmy, że opisywane w artykule wyrażenia kwadratowe były intensywnie badane w matematyce. Szczególnie interesujący był problem polegający na uogólnieniu tożsamości Diofantosa na wyrażenia większej liczby zmiennych. Wiadomo na przykład, że jeśli rozważymy iloczyn dwóch wyrażeń algebraicznych, z których każde jest sumą n kwadratów, to ich iloczyn będzie pewnym wyrażeniem algebraicznym będącym sumą n kwadratów jedynie dla $n=1,2,4,8$. Uzasadnienie tego faktu daleko wykracza jednak poza program szkół średnich i dla gimnazjalisty może stanowić jedynie sympatyczną ciekawostkę.

Poniżej znajdują się zadania dotyczące tematu artykułu; wskazówki do nich zostaną zamieszczone w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 4.
Udowodnij, że iloczyn dwóch liczb, będących różnicami kwadratów dwóch liczb całkowitych, można przedstawić jako różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych.

Zadanie 5.
Udowodnij, że jeżeli liczba n jest różnicą kwadratów dwóch liczb całkowitych, to liczba $3n$ również.

Zadanie 6.
Udowodnij, że żadnej liczby postaci $4k+3$, gdzie k jest liczbą całkowitą, nie da się przedstawić w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych.

Zadanie 7.
Wykaż, że liczby 231 nie można przedstawić w postaci $2a^2+3b^2$ dla liczb całkowitych a, b.

Michał Kieza

Dziesięcioro Wspaniałych

Na ponad 14 000 uczestników części testowej tegorocznej edycji OMG, jedynie dziesięciorgu z nich udało się uzyskać maksymalną liczbę punktów. Byli to:

Dominika BAKALARZ, Anna CZERWIŃSKA,
Ewa ZIELIŃSKA, Tomasz KLEINER,
Michał MADEJA, Jan MIRKIEWICZ,
Konrad MAJEWSKI, Cyprian MATACZYŃSKI,
Patryk SZCZEPAŃSKI, Piotr PAWLAK.

Gratulujemy i życzymy powodzenia przy dalszych zmaganiach z OMG!

Zwycięstwo Polaków na „MEMO 2011”

W dniach 1–7 września br. odbyły się w Chorwacji 5-te Zawody Matematyczne Europy Środkowej (*Middle European Mathematical Olympiad*, w skrócie MEMO). Uczestniczyły w nich reprezentacje następujących dziesięciu państw: Austrii, Chorwacji, Czech, Litwy, Niemiec, Polski, Słowacji, Słowenii, Szwajcarii oraz Węgier. Każdy kraj reprezentowało sześciu uczniów.

Polska delegacja została wyłoniona na podstawie wyników ubiegłorocznej edycji Olimpiady Matematycznej. W jej skład weszli:

- Grzegorz Białek – ZSO nr 6, VI LO w Bydgoszczy;
- Karol Kaszuba – Gimnazjum nr 42 w Warszawie;
- Wojciech Nadara – XIV LO w Warszawie;
- Dariusz Matlak – II LO w Krakowie;
- Kamil Rychlewicz – Publ. Gimnazjum nr 8 w Łodzi;
- Michał Zając – V LO w Krakowie.

Dnia 3 września zawodnicy zmagali się przez pięć godzin z czterema zadaniami zawodów indywidualnych. W konkurencji tej bezapelacyjnie zwyciężył nasz reprezentant Wojciech Nadara, uzyskując jako jedyny maksymalną liczbę punktów, co jest rzadkością na zawodach MEMO. Zostało to odnotowane na dyplomie Wojtka. Oprócz Wojtka złoty medal zdobyło także pięciu innych zawodników, w tym dwóch Polaków: Michał Zając i Karol Kaszuba. Nasi pozostali reprezentanci także wrócili do domu z medalami: srebrny wywalczyli Grzegorz Białek i Kamil Rychlewicz, a brązowy Dariusz Matlak.

Następnego dnia miały miejsce zawody zespołowe. Każda z reprezentacji wspólnymi siłami rozwiązywała przez pięć godzin osiem zadań. Nasza drużyna okazała się znów bezkonkurencyjna: zdobyła pierwsze miejsce uzyskując maksymalną liczbę punktów. Drugie miejsce zajęła reprezentacja Węgier, rozwiązując 6,5 zadania.

Początek zawodów MEMO sięga roku 1978, kiedy odbyły się pierwsze Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne. Zawody te trwały nieprzerwanie do roku 2006.

W 2007 roku powiększono grono uczestników i w miejsce APZM utworzono MEMO.

Warto wspomnieć, że Wojtek Nadara był dwukrotnie laureatem OMG. Laureatami OMG byli także Karol Kaszuba (trzykrotnie) i Kamil Rychlewicz (czterokrotnie!), którzy jeszcze jako gimnazjaliści dostali się do polskiej reprezentacji na MEMO. Postanowiliśmy zapytać ich o wrażenia z zawodów, plany na przyszłość i rady dla uczniów, chcących pójść ich śladami.

Łukasz Rajkowski: Medale zdobyte podczas MEMO 2011 *z pewnością sprawiają Wam wielką satysfakcję. Czy podczas zawodów udało Wam się dokonać czegoś, co jest dla Was szczególnym powodem do dumy?*

Karol Kaszuba: Ja cieszę się z tego, że wygrałem ze znajomym zakład o to, czy będę miał lepszy wynik od Kamila. *śmiech*

Kamil Rychlewicz: A ja z tego, że ten znajomy przegrał zakład. *śmiech* Ponadto cieszyłem się ze zrobienia trudnego zadania z teorii liczb na zawodach drużynowych – udało się to tylko trzem zespołom. Oprócz tego zaproponowałem metodę, którą rozwiązaliśmy zadanie z kombinatoryki z drużynowych — było to zadanie, z którego jako jedyni uzyskaliśmy maksymalną liczbę punktów.

ŁR: Czy podczas wyjazdu do Chorwacji mieliście bardzo napięty harmonogram?

KK: Poza zawodami nie było ściśle ustalonego planu. Były wspólne wycieczki, na przykład do zamku w Trakoscanie, jednak większość wolnego czasu organizowaliśmy sobie sami, grając np. w pokera, który w Chorwacji jest zupełnie legalny. Był to bardzo dobry pomysł na zawarcie międzynarodowych znajomości.

ŁR: Czy byliście najmłodszymi uczestnikami na MEMO?

KR: Wydaje mi się, że tak. Nie wytykano nas jednak palcami, więc pewności nie mam.

ŁR: Z pewnością byliście jednymi z najmłodszych, a jednocześnie jednymi z najlepszych. Aby na tym etapie edukacji dojść do olimpijskiego poziomu, zapewne musieliście zacząć interesować się matematyką odpowiednio wcześnie. W jakich okolicznościach i jaką rolę odegrali w tym Wasi nauczyciele?

KR: W pierwszej klasie szkoły podstawowej startowałem w „Kangurze" i uzyskałem dobry wynik — od tego się chyba zaczęło. Matematyka szła mi na tyle dobrze, że w IV klasie podstawówki nauczycielka matematyki zorganizowała mi indywidualny tok nauczania. Również w gimnazjum zamiast zwykłych lekcji zostawałem po zajęciach, aby rozwiązywać z moim nauczycielem odrobinę ambitniejsze zadania.

KK: Ja w podstawówce dowiedziałem się, że jest taki mistrz matematyczny jak Kamil Rychlewicz i uznałem, że nie ma mowy, aby ktoś w moim wieku cisnął mnie z matmy. *śmiech* Od początku gimnazjum większość matematycznej wiedzy zdobywałem samodzielnie, choć pomocne były na przykład kółka matematyczne dla licealistów, na które uczęszczałem.

ŁR: Gdzie było miejsce OMG na Waszej dotychczasowej ścieżce edukacyjnej?

KK: W pierwszej klasie OMG pozwoliła mi się porównać z innymi gimnazjalistami. W drugiej uświadomiła mi, że nawet jak się rozwiąże jakieś zadanie, to trzeba je jeszcze mądrze zapisać. No a w trzeciej to po prostu spotkałem się z kolegami.

KR: Dla mnie OMG dostarczało możliwości sprawdzenia się oraz wyznaczało jakiś cel do osiągnięcia, co motywowało mnie do pracy.

ŁR: W jaki sposób nauczyciel może pomóc uczniowi zdolnemu? Co powinien robić sam uczeń, chcący powtórzyć Wasze sukcesy?

KR: Nauczyciel powinien pokazywać uczniowi źródła, z których może się uczyć oraz służyć pomocą w przypadku jakichkolwiek problemów ze zrozumieniem. Odnośnie rad dla ucznia — należy robić mnóstwo zadań, nie poddawać się oraz nie brać się od razu za problemy z olimpiad międzynarodowych.

KK: Do rad Kamila dodam poznawanie ludzi, którzy też przygotowują się do Olimpiady, ponieważ duży wpływ ma środowisko.

ŁR: Jakie są Wasze plany na okres nauki w liceum?

Obaj: 3 złote medale na IMO. *śmiech* (IMO, czyli International Mathematical Olympiad — najbardziej prestiżowe zawody matematyczne na świecie dla uczniów szkół średnich; Polskę reprezentuje corocznie sześciu zwycięzców Olimpiady Matematycznej – przyp. red.)

KK: ... ja oprócz tego chciałbym zaliczyć pierwszy rok matematyki na Uniwersytecie Warszawskim, gdzie od października uczęszczam na wykłady.

ŁR: Dzięki za rozmowę, gratuluję sukcesu i życzę powodzenia w realizacji Waszych planów.

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Sześciokąty równokątne

5. a) Wyznacz długość boku tego trójkąta w zależności od a, b i c. b) Szukane pole jest różnicą pola dużego trójkąta i trzech narożnych trójkątów. c) Rozpatrz rzuty prostokątne głównych przekątnych na odpowiednie boki danego trójkąta równobocznego.

6. Uzupełnij dany sześciokąt do trójkąta równobocznego, a następnie przedstaw daną sumę w zależności od wysokości tego trójkąta i od wysokości trzech narożnych trójkątów równobocznych.

7. Niech proste CD i ED przecinają prostą AB odpowiednio w punktach P i Q. Zauważ, że symetralne odcinków BC i EA są jednocześnie dwusiecznymi kątów QPE i PQE.

Pozory mylą

1. Oblicz $(1+\sqrt{2})^2$ oraz $(1+\sqrt{2})^3$.

2. Wyznacz najpierw a_1 oraz b_1, a następnie przedstaw liczby a_{n+1}, b_{n+1} w zależności od a_n, b_n. Skorzystaj przy tym z równości

$$a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}=(a_n+b_n\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}).$$

Wykaż z kolei, podobnie jak wyżej, że liczbę $(3-2\sqrt{2})^n$ można przedstawić w postaci $c_n-d_n\sqrt{2}$, gdzie c_n i d_n są całkowite i dodatnie, a następnie wywnioskuj, że $a_n=c_n$ oraz $b_n=d_n$.

3. Zauważ, że $a_n^2-2b_n^2=(a_n-b_n\sqrt{2})(a_n+b_n\sqrt{2})$. Ponadto, jeśli $a_n^2-2b_n^2=1$, to $(a_n-1)(a_n+1)=2b_n^2$. Uzasadnij, że obie liczby a_n-1, a_n+1 są parzyste i że każda z nich jest dzielnikiem liczby b_n^2.

4. Z artykułu wnioskujemy, że

$$(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n=[(3+2\sqrt{2})^n]+1,$$

gdzie $[x]$ to część całkowita liczby x. Korzystając z zadania 2, uzyskujemy $[(3+2\sqrt{2})^n]+1=(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n=2a_n$.

Redaguje zespół w składzie: Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski (redaktor naczelny), Urszula Swianiewicz, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com