Jak zredagować rozwiązanie zadania w OMJ?

„Nie należy myśleć, że ci, którzy są w matematyce obecni dłużej lub mocniej, niż ja, są mądrzejsi i bardziej utalentowani, więc i tak zrozumieją. Nie należy też myśleć: przecież akurat ten fragmencik mówi o rzeczy oczywistej, więc ktoś, kto tego nie rozumie i się czepia, jest tępy i nie warto się nim przejmować.”

Powyższy cytat pochodzi z poradnika dla studentów matematyki[1], ale można go zadedykować każdemu, kto redaguje rozwiązania zadań matematycznych, w tym także uczestnikom Olimpiady Matematycznej Juniorów.

Pisząc rozwiązanie zadania trzeba pamiętać, że po wysłaniu go do odpowiedniego Komitetu Okręgowego OMJ nie będziemy mieli już możliwości wytłumaczenia swoich rozważań osobie recenzującej to rozwiązanie. Oceniane będzie oprócz obliczeń zapisane rozumowanie. Inaczej jest w szkole - zawsze możemy wytłumaczyć nauczycielowi to, co napisaliśmy, bo spotykamy się z nim na lekcjach.

Porównajmy dwa rozwiązania tego samego zadania. W pierwszym nic nie jest wytłumaczone. Zrobiono tylko obliczenia, a rozumowanie musi sobie przeprowadzić oceniający rozwiązanie. W drugim podany jest tok rozumowania przedstawiający krok po kroku jak dojść od wyjściowych założeń do wyniku. I choć oba byłyby zapewne uznane za w pełni poprawne, to właśnie to drugie stanowi wzorzec do jakiego powinniśmy dążyć podczas redagowania rozwiązania.

* * * * *

Zadanie 1. Z przeciwległych wierzchołków danego prostokąta poprowadzono odcinki prostopadłe do jego jednej przekątnej. Poprowadzone odcinki podzieliły tę przekątną na trzy równe części, z których każda jest odcinkiem o długości 5. Oblicz długości boków danego prostokąta.

Rozwiązanie 1.

$x^2+25=a^2$

$x^2+100=b^2$

$a^2+b^2=225$

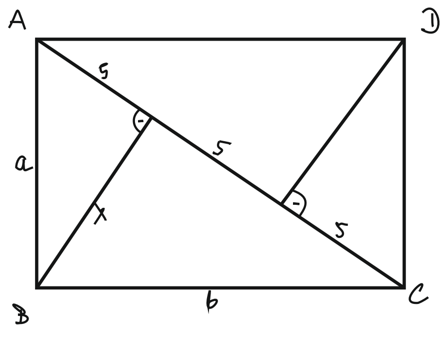
$2x^2+125=225$

$x^2=50$

$x=5\sqrt{2}$

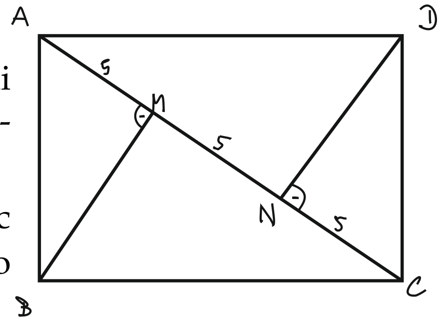
$a^2=50+25=75,\ a=5\sqrt{3}$

$b^2=50+100=125,\ b=5\sqrt{6}.$



[1] Paweł Goldstein, Paweł Strzelecki, *Jak pisać prace dyplomowe z matematyki*. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, Warszawa 2015

Rozwiązanie 2.



Niech punkty M i N będą rzutami prostokątnymi wierzchołków B i D na przekątną AC danego prostokąta.

Z treści zadania mamy: $AM = MN = NC = 5$, więc $AC = 15$ i $CM = 10$. Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów prostokątnych AMB i CND, dostajemy

$$BM^2 = AB^2 - AM^2 = AB^2 - 25 \text{ oraz } BM^2 = BC^2 - CM^2 = BC^2 - 100,$$

skąd $AB^2 - 25 = BC^2 - 100$, więc (1): $BC^2 = AB^2 + 75$.

Rozpatrując trójkąt prostokątny ABC i stosując do niego twierdzenie Pitagorasa, otrzymujemy

$$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 15^2 - AB^2 = 225 - AB^2.$$

Wykorzystując otrzymaną równość oraz równość (1), dostajemy

$$AB^2 + 75 = 225 - AB^2,$$

a stąd $AB^2 = 75$, więc $AB = 5\sqrt{3}$. Wstawiając teraz to do (1), otrzymujemy

$$BC^2 = 75 + 75 = 150,$$

więc $BC = 5\sqrt{6}$.

Odpowiedź: Dany prostokąt ma boki długości: $5\sqrt{3}$ i $5\sqrt{6}$.

A jeśli nie potrafimy zadania rozwiązać?

Może zbadanie szczególnych przypadków pomoże nam odkryć jakąś regułę, która pozwoli nam to zadanie rozwiązać? Przyjrzyjmy się poniższemu zadaniu.

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których każda z liczb: $p+12$, $p+24$, $p+36$, $p+48$ jest też liczbą pierwszą.

Przyjmijmy za p kilka początkowych liczb pierwszych i zestawmy otrzymane wyniki w tabelce.

p	$p+12$	$p+24$	$p+36$	$p+48$
2	14	26	38	50
3	15	27	39	51
5	17	29	41	53
7	19	31	43	55
11	23	35	47	59

Zauważmy, że w każdym wierszu tej tabeli występuje liczba podzielna przez 5. Pokażemy, że tak będzie zawsze. Stąd jedyną liczbą spełniającą warunki zadania będzie $p = 5$. W tym momencie możemy zabrać się za redakcję rozwiązania.

Rozwiązanie

Każdą liczbę naturalną (ale też liczbę pierwszą) można zapisać w jednej z postaci: $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$, gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną.

Jeżeli $p = 5k+1$, to

$$p+24 = 5k+1+24 = 5k+25 = 5(k+5).$$

Liczba ta jest podzielna przez 5 i jest większa od 5, więc jest to liczba złożona.

Jeśli $p = 5k + 2$, to

$$p + 48 = 5k + 2 + 58 = 5k + 50 = 5(k + 10)$$

i liczba ta jako większa od 5 i podzielna przez 5 jest liczbą złożoną.

Jeżeli $p = 5k + 3$, to

$$p + 12 = 5k + 3 + 12 = 5(k + 3).$$

Liczba ta też jest liczbą złożoną, bo jest większa od 5 i podzielna przez 5.

Jeśli $p = 5k + 4$, to

$$p + 36 = 5k + 4 + 36 = 5k + 40 = 5(k + 8).$$

I w tym przypadku otrzymaliśmy liczbę złożoną.

Pozostaje przypadek liczby pierwszej p podzielnej przez 5. Jest tylko jedna taka liczba $p = 5$ i jak łatwo sprawdzić wszystkie pozostałe liczby też są liczbami pierwszymi. Zatem istnieje tylko jedna taka liczba $p = 5$.

Odpowiedź: Jedyną liczbą pierwszą spełniającą warunki zadania jest $p = 5$.

Na co jeszcze zwrócić uwagę podczas pisania rozwiązań zadań?

Koniecznie należy zadbać o estetykę pracy. Duża liczba skreśleń bardzo utrudnia czytanie i właściwe ocenianie pracy. Ale to można zrobić, gdy nie zostawiamy redagowania rozwiązań na ostatnią chwilę (np. ostatni dzień przed wysyłką zadań części korespondencyjnej). Zachęcam do zapisywania rozwiązań zadań wcześniej niż w ostatnim dniu przed wysyłką.

Należy pamiętać, aby rozwiązania zadań zapisywać na kartkach jednostronnie podając na górze swoje dane: Imię i nazwisko, klasa, szkoła oraz numer zadania, którego rozwiązanie zapisujemy. W razie, gdy rozwiązanie nie mieści się na jednej stronie, należy ponumerować kolejne kartki rozwiązania danego zadania.

Chyba też warto - kilka dni przed wysłaniem prac - pokazać swojemu nauczycielowi spisane rozwiązania i zapytać czy nie ma w nich fragmentów wymagających lepszej redakcji.

A jeśli nie udało mi się rozwiązać wszystkich zadań z części korespondencyjnej?

Nie jest konieczne rozwiązanie wszystkich zadań części korespondencyjnej. Zdarza się, że 3-4 poprawnie rozwiązane zadania to dobry wynik, a 5-6 poprawnie rozwiązanych zadań - wyśmienity. Regulamin OMJ nie przewiduje żadnych sztywnych progów kwalifikacyjnych. Zależy on od liczby uczestników, trudności zadań oraz ocen nadesłanych prac.

Warto spróbować swoich sił. Jeśli nawet nie udało się zakwalifikować do zawodów wyższego szczebla, to na pewno praca nad zadaniami OMJ będzie procentować w przyszłości, np. podczas przygotowań do egzaminu kończącego naukę w szkole podstawowej.

Tomasz Szymczyk
Bielsko Biała, 1.10.2021 r.