XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(23 września 2021 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. Istnieje taka liczba naturalna, której każda cyfra jest równa 2 lub 6 i która jest podzielna przez

N a) 4;

N b) 5;

T c) 9.

Komentarz

a) Liczby jednocyfrowe 2 oraz 6 nie są podzielne przez 4. Liczba naturalna o co najmniej dwóch cyfrach, z których każda jest równa 2 lub 6, może być zakończona tylko cyframi 22, 26, 62 lub 66. Zgodnie z cechą podzielności przez 4, żadna taka liczba nie jest podzielna przez 4.

b) Każda liczba podzielna przez 5 jest zakończona cyfrą 0 lub 5. W związku z tym żadna liczba, której ostatnią cyfrą jest 2 lub 6 nie jest podzielna przez 5.

c) Liczba naturalna jest podzielna przez 9, jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 9. Przykładami liczb podzielnych przez 9, których jedynymi cyframi są 2 i 6 są więc 666, 66222, 222222222, gdyż suma cyfr każdej z tych liczb jest podzielna przez 9.

2. Istnieją takie dwa trójkąty, których część wspólna jest

T a) pięciokątem;

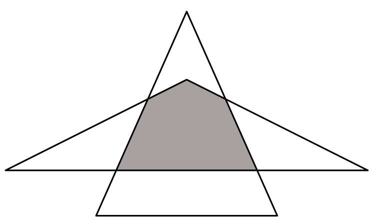
T b) sześciokątem;

N c) siedmiokątem.

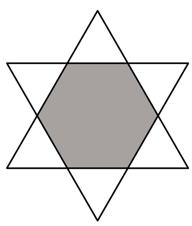
Komentarz

a) Przykładowe ułożenie takich dwóch trójkątów jest przedstawione na rysunku 1.

b) Przykładowe ułożenie takich dwóch trójkątów jest przedstawione na rysunku 2.



rys. 1



rys. 2

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

c) Przypuśćmy, że wielokąt $\mathcal{W}$ jest częścią wspólną pewnych dwóch trójkątów. Wówczas boki wielokąta $\mathcal{W}$ zawierają się w bokach tych dwóch trójkątów. Co więcej żaden z sześciu boków tych trójkątów nie może zawierać więcej niż jednego boku wielokąta $\mathcal{W}$. W związku z tym liczba boków wielokąta $\mathcal{W}$ jest nie większa od 6.

3. Suma pięciu parami różnych dodatnich liczb całkowitych jest równa 17. Wynika z tego, że jedną z tych pięciu liczb jest

T a) 2;

T b) 3;

N c) 4.

Komentarz

a) Przypuśćmy, że żadna z pięciu danych liczb nie jest równa 2. Wówczas suma tych pięciu liczb jest nie mniejsza od $1+3+4+5+6=19$, a zatem nie może być równa 17.

b) Przypuśćmy, że żadna z pięciu danych liczb nie jest równa 3. Wówczas suma tych pięciu liczb jest nie mniejsza od $1+2+4+5+6=18$, a zatem nie może być równa 17.

c) Zachodzi równość $1+2+3+5+6=17$, a przy tym żaden z pięciu składników sumy po lewej stronie nie jest równy 4.

Uwaga

Liczby rozważane w zadaniu są *parami różne*, czyli żadne dwie z nich nie są równe. W szczególności piątka liczb 1, 1, 5, 5, 5 nie spełnia warunków zadania.

4. Istnieją takie liczby całkowite x, y, z, że ujemna jest każda z liczb

T a) $x+y$, $y+z$, $z+x$;

N b) $x-y$, $y-z$, $z-x$;

N c) $x\cdot y$, $y\cdot z$, $z\cdot x$.

Komentarz

a) Przyjmując $x=y=z=-1$, uzyskujemy $x+y=y+z=z+x=-2$.

b) Gdyby wszystkie trzy z liczb $x-y$, $y-z$, $z-x$ były ujemne, to ich suma byłaby również liczbą ujemną. Tymczasem

$$(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$$

nie jest liczbą ujemną.

c) Gdyby wszystkie trzy z liczb $x\cdot y$, $y\cdot z$, $z\cdot x$ były ujemne, to ich iloczyn również byłby liczbą ujemną. Tymczasem

$$(x\cdot y)\cdot(y\cdot z)\cdot(z\cdot x)=(x\cdot y\cdot z)^2$$

jest liczbą nieujemną jako kwadrat pewnej liczby całkowitej.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

5. Liczba naturalna n jest podzielna przez 2, a liczba $n+1$ jest podzielna przez 3. Wynika z tego, że

N a) liczba $n+2$ jest podzielna przez 4;

N b) liczba $n+3$ jest podzielna przez 5;

T c) liczba $n+4$ jest podzielna przez 6.

Komentarz

a), b) Liczba $n=8$ spełnia warunki zadania, gdyż jest podzielna przez 2, a liczba $n+1=9$ jest podzielna przez 3. Jednocześnie liczba $n+2=10$ nie jest podzielna przez 4, a liczba $n+3=11$ nie jest podzielna przez 5.

c) Jeśli liczba n jest parzysta, to również liczba $n+4$ jest parzysta. Jeśli liczba $n+1$ jest podzielna przez 3, to również liczba $(n+1)+3=n+4$ jest podzielna przez 3. Skoro liczba $n+4$ jest parzysta i podzielna przez 3, to jest podzielna przez 6.

6. Liczby całkowite a oraz b spełniają nierówność $a^3 \geqslant b^2$. Wynika z tego, że

T a) $a \geqslant 0$;

N b) $b \geqslant 0$;

N c) $2a+b \geqslant 0$.

Komentarz

a) Kwadrat dowolnej liczby całkowitej jest liczbą nieujemną, wobec czego $b^2 \geqslant 0$. Łącząc tę obserwację z założeniem $a^3 \geqslant b^2$, wnioskujemy, że $a^3 \geqslant 0$. Stąd wynika, że $a \geqslant 0$.

b), c) Przyjmując $a=9=3^2$ oraz $b=-27=-3^3$, uzyskujemy $a^3=3^6=b^2$. Wówczas jednak $b<0$ oraz $2a+b=-9<0$.

7. Istnieje taki trójkąt, który można rozciąć na dwa trójkąty

N a) ostrokątne;

T b) prostokątne;

T c) rozwartokątne.

Komentarz

Zauważmy, że jeśli trójkąt jest rozcięty na dwa trójkąty, to rozcinający odcinek łączy jeden z jego wierzchołków z pewnym punktem znajdującym się na przeciwległym boku.

a) Przypuśćmy, że trójkąt ABC został rozcięty na trójkąty ACD i BCD. Wówczas nie jest możliwe, aby obydwa kąty ADC oraz BDC były ostre, gdyż suma ich miar wynosi $180°$. To oznacza, że co najmniej jeden z trójkątów ACD i BCD nie jest ostrokątny.

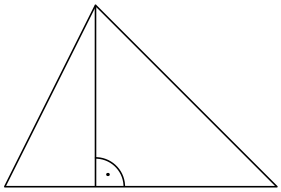
b) Rozważmy dowolny trójkąt ostrokątny. Dowolna wysokość w tym trójkącie jest odcinkiem rozcinającym go na dwa trójkąty prostokątne (rys. 3).

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

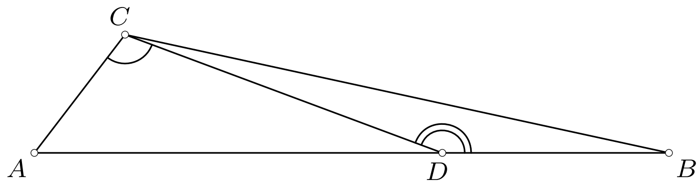
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

c) Rozważmy dowolny trójkąt rozwartokątny ABC o kącie rozwartym przy wierzchołku C i wybierzmy na boku AB dowolny punkt D o tej własności, że $\sphericalangle ACD > 90^\circ$ (rys. 4). Wówczas $\sphericalangle ADC < 90^\circ$ i w konsekwencji $\sphericalangle BDC > 90^\circ$. Odcinek CD rozcina zatem trójkąt ABC na dwa trójkąty rozwartokątne.



rys. 3



rys. 4

8. Z pewnej liczby prostopadłościennych klocków o wymiarach $1 \times 2 \times 3$ można zbudować prostopadłościan o wymiarach

N a) $4 \times 4 \times 4$;

T b) $5 \times 6 \times 7$;

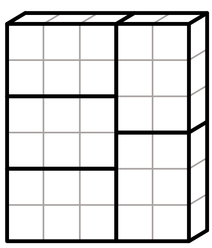
T c) $7 \times 8 \times 9$.

Komentarz

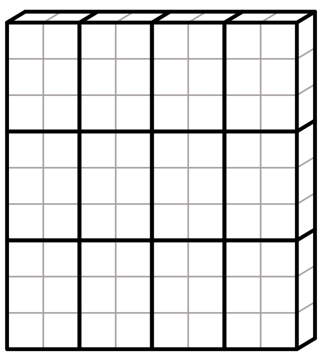
a) Objętość sześcianu o wymiarach $4 \times 4 \times 4$ jest równa 64, a objętość jednego klocka o wymiarach $1 \times 2 \times 3$ jest równa 6. Ponieważ 64 nie jest liczbą podzielną przez 6, więc nie jest możliwe zbudowanie sześcianu o krawędzi długości 4 z klocków o wymiarach $1 \times 2 \times 3$.

b) Zauważmy, że z pięciu klocków o wymiarach $1 \times 2 \times 3$ można zbudować prostopadłościan o wymiarach $1 \times 5 \times 6$ (rys. 5). W związku z tym łącząc siedem takich warstw możemy zbudować prostopadłościan o wymiarach $5 \times 6 \times 7$ (przy użyciu 35 klocków).

c) Zauważmy, że z dwunastu klocków o wymiarach $1 \times 2 \times 3$ można zbudować prostopadłościan o wymiarach $1 \times 8 \times 9$ (rys. 6). W związku z tym łącząc siedem takich warstw możemy zbudować prostopadłościan o wymiarach $7 \times 8 \times 9$ (przy użyciu 84 klocków).



rys. 5



rys. 6

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Ministerstwo Edukacji i Nauki

9. Liczba dodatnich dzielników dodatniej liczby całkowitej a jest większa od liczby dodatnich dzielników dodatniej liczby całkowitej b. Wynika z tego, że

$\boxed{\text{N}}$ a) liczba a jest większa od liczby b;

$\boxed{\text{N}}$ b) liczba $a+1$ ma więcej dodatnich dzielników niż liczba $b+1$;

$\boxed{\text{N}}$ c) liczba $2a$ ma więcej dodatnich dzielników niż liczba $2b$.

Komentarz

Przyjmijmy $a=8$ oraz $b=9$. Wówczas liczba a ma cztery dodatnie dzielniki: 1, 2, 4, 8, a liczba b ma trzy dodatnie dzielniki: 1, 3, 9.

a) Dla tak dobranych liczb a, b zachodzi nierówność $a<b$.

b) Liczba $b+1=10$ ma cztery dodatnie dzielniki: 1, 2, 5, 10, a liczba $a+1=9$ ma trzy dodatnie dzielniki.

c) Liczba $2a=16$ ma pięć dodatnich dzielników: 1, 2, 4, 8, 16, a liczba $2b=18$ ma sześć dodatnich dzielników: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

10. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę $60°$. Wysokość CD dzieli bok AB na odcinki długości $AD=2$ i $BD=6$. Wynika z tego, że

$\boxed{\text{T}}$ a) jeden z boków trójkąta ABC jest dwa razy dłuższy od innego boku tego trójkąta;

$\boxed{\text{T}}$ b) jeden z kątów trójkąta ABC jest dwa razy większy od innego kąta tego trójkąta;

$\boxed{\text{N}}$ c) pole trójkąta BCD jest dwa razy większe od pola trójkąta ACD.

Komentarz

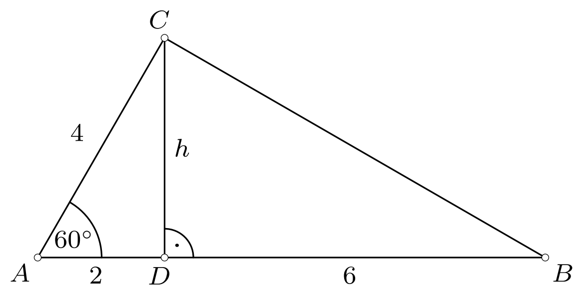
a) Trójkąt prostokątny ACD jest połową trójkąta równobocznego, skąd wniosek, że $AC=2\cdot AD=4$. Wobec tego $AB=8=2\cdot AC$.

b) Skoro w trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę $60°$ oraz $AB=2\cdot AC$, to ten trójkąt również jest połową trójkąta równobocznego i wobec tego $\sphericalangle ABC=30°$.

c) Niech h będzie długością odcinka CD (rys. 7). Oznaczając przez $[\mathcal{T}]$ pole trójkąta $\mathcal{T}$, mamy więc

$$[ACD]=\frac{1}{2}AD\cdot h \quad \text{oraz} \quad [BCD]=\frac{1}{2}BD\cdot h.$$

Stąd wniosek, że $[BCD]=3\cdot[ACD]$, gdyż $BD=3\cdot AD$.



rys. 7

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Ministerstwo Edukacji i Nauki

11. Liczby dodatnie x oraz y spełniają równość $x+y=x\cdot y$. Wynika z tego, że liczba $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ jest równa

N a) $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}$;

T b) $\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{y-1}$;

T c) 1.

Komentarz

a) Liczby $x=y=2$ spełniają równość $x+y=x\cdot y$, ale

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1\neq\frac{1}{4}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}.$$

b), c) Sprowadzając składniki rozważanej sumy do wspólnego mianownika i korzystając z założenia $x+y=x\cdot y$, uzyskujemy

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{y}{x\cdot y}+\frac{x}{x\cdot y}=\frac{y+x}{x\cdot y}=1.$$

Zauważmy ponadto, że

$$\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{y-1}=\frac{1}{(x-1)(y-1)}=\frac{1}{x\cdot y-(x+y)+1}=1,$$

przy czym ponownie skorzystaliśmy z założenia $x+y=x\cdot y$.

Uwaga

Jeśli liczby x, y spełniają warunek $x+y=x\cdot y$, to $x\neq 1$ oraz $y\neq 1$, czyli liczby $x-1$ oraz $y-1$ są różne od zera. Istotnie, dla dowolnej liczby x mamy $x+1\neq x\cdot 1$, a zatem $y\neq 1$ (analogicznie można uzasadnić, że $x\neq 1$).

12. Istnieje taki sześcian, że długość jego krawędzi jest liczbą naturalną oraz

T a) suma długości jego wszystkich krawędzi jest kwadratem liczby naturalnej;

N b) jego pole powierzchni całkowitej jest kwadratem liczby naturalnej;

T c) jego objętość jest kwadratem liczby naturalnej.

Komentarz

Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu o krawędzi długości n jest równa $12n$. Pole powierzchni całkowitej takiego sześcianu jest równe $6n^2$, a jego objętość jest równa n^3.

a) Jeżeli $n=12$, to suma długości krawędzi sześcianu jest równa 12^2.

c) Jeżeli $n=1$, to objętość sześcianu jest równa 1^2.

b) Skorzystamy z następującego faktu: liczba całkowita większa od 1 jest kwadratem liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy w jej rozkładzie na czynniki pierwsze wszystkie wykładniki są parzyste. Innymi słowy, w rozkładzie kwadratu liczby całkowitej większej od 1 na czynniki pierwsze każda liczba pierwsza występuje parzystą liczbę razy.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Zgodnie z przytoczonym faktem, w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby n^2 liczba 2 występuje z parzystym wykładnikiem. W rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $6n^2 = 2\cdot 3\cdot n^2$ czynnik 2 występuje z o jeden większym, a więc nieparzystym wykładnikiem. To oznacza, że liczba $6n^2$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Uwaga

Przytoczona własność charakteryzująca kwadraty liczb całkowitych większych od 1 została omówiona, wraz z dowodem i przykładowymi zastosowaniami, w artykule „Kwadraty i dzielniki" (*Kwadrat nr 11*, grudzień 2013, twierdzenie 2.).

13. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Wynika z tego, że

N a) suma długości odcinków AP i BP jest większa od długości odcinka CP;

T b) suma obwodów trójkątów ACP i BCP jest większa od obwodu trójkąta ABP;

N c) suma pól trójkątów ACP i BCP jest większa od pola trójkąta ABP.

Komentarz

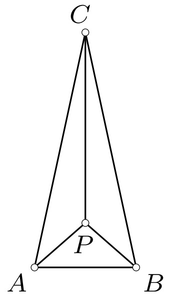
a) Rozważmy trójkąt ABP, w którym $AP = BP = 1$. Niech C będzie takim punktem, że $CP > 2$ oraz punkt P znajduje się wewnątrz ABC (rys. 8). Wówczas $AP + BP < CP$.

b) Zauważmy, że zachodzą nierówności $AC + BC > AB$ oraz $CP > 0$. Wobec tego

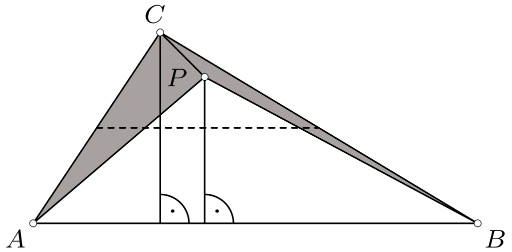
$$(AC+CP+AP)+(BC+CP+BP) = AP+BP+(AC+BC)+2\cdot CP > AP+BP+AB,$$

czyli suma obwodów trójkątów ACP i BCP jest większa od obwodu trójkąta ABP.

c) Rozważmy dowolny trójkąt ABC i oznaczmy przez h długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka C. Wybierzmy wewnątrz trójkąta dowolny punkt P, którego odległość od prostej AB jest większa od $\frac{1}{2}h$ (rys. 9). Wówczas pole trójkąta ABP jest większe od połowy pola trójkąta ABC, a co za tym idzie — pole czworokąta $APBC$ jest mniejsze od połowy pola trójkąta ABC. W konsekwencji suma pól trójkątów ACP i BCP jest mniejsza od pola trójkąta ABP.



rys. 8



rys. 9

14. W gronie sześciu osób każda zna dokładnie trzy spośród pozostałych pięciu osób, przy czym jeśli osoba A zna osobę B, to również osoba B zna osobę A. Wynika z tego, że

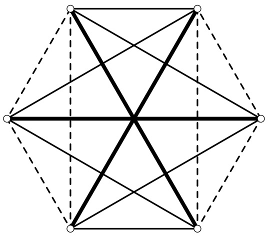
N a) pewne trzy spośród tych sześciu osób wzajemnie się znają;

N b) pewne trzy spośród tych sześciu osób wzajemnie się nie znają;

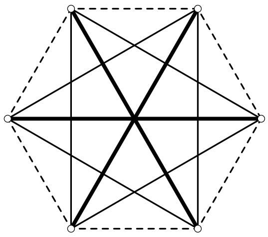
T c) można te sześć osób podzielić na trzy pary znających się osób.

Komentarz

Zauważmy, że w rozważanej grupie każdy ma dokładnie dwóch nieznajomych pośród pozostałych pięciu osób. Wyobraźmy sobie, że każdy podaje rękę każdemu ze swoich nieznajomych (jednemu lewą, jednemu prawą). W taki sposób wszystkie uściski rąk tworzą „cykle” złożone z co najmniej trzech osób. To oznacza, że wszystkie nieznajomości w grupie układają się albo w dwa „trójkąty” (rys. 10), albo w jeden „sześciokąt” (rys. 11), przy czym na ilustracjach odcinki przerywane oznaczają nieznajomości, a odcinki ciągłe — znajomości.



rys. 10



rys. 11

a) Jeśli układ znajomości wygląda tak, jak na rysunku 10, to nie ma takich trzech osób, które wzajemnie się znają.

b) Jeśli układ znajomości wygląda tak, jak na rysunku 11, to nie ma takich trzech osób, które wzajemnie się nie znają.

c) W obydwu możliwych sytuacjach można znaleźć odpowiednie sposoby podziału na pary — są one zaznaczone na rysunkach 10 i 11 przy użyciu pogrubionych odcinków.

15. W pewnym ostrosłupie prawidłowym czworokątnym długość krawędzi podstawy jest równa 2, a długość krawędzi bocznej jest równa b. Wynika z tego, że

T a) $b > \sqrt{2}$;

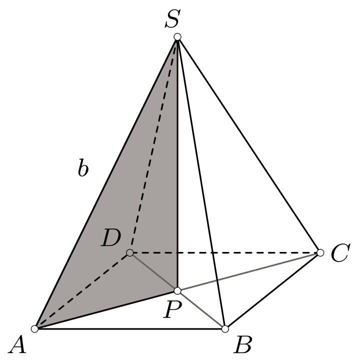
T b) wysokość tego ostrosłupa jest mniejsza od b;

T c) pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest większe od 4.

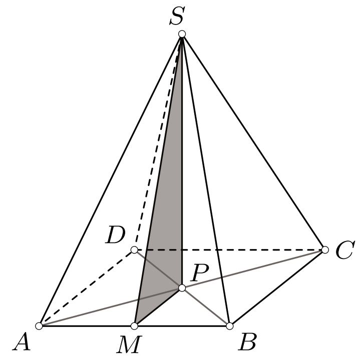
Komentarz

Oznaczmy kwadrat w podstawie danego ostrosłupa przez $ABCD$, środek podstawy przez P, środek odcinka AB przez M, a wierzchołek ostrosłupa — przez S.

a), b) W trójkącie prostokątnym APS przeciwprostokątna AS o długości b jest dłuższa zarówno od przyprostokątnej AP o długości $\frac{1}{2}\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$, jak i od przyprostokątnej PS, która jest wysokością danego ostrosłupa (rys. 12).



rys. 12



rys. 13

c) W trójkącie prostokątnym MPS przeciwprostokątna MS jest dłuższa od przyprostokątnej MP (rys. 13). W konsekwencji pole ściany ABS, równe $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot MS$, jest większe od $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot MP$, czyli pola trójkąta ABP. Analogicznie uzasadniamy, że pola ścian BCS, CDS, DAS są większe odpowiednio od pól trójkątów BCP, CDP, DAP. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest zatem większe od pola podstawy tego ostrosłupa, które jest równe 4.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki